Sélection non exhaustive et totalement subjective d'exercices repris du site de l'APMEP pour préparer le baccalauréat. *Rappel : la calculatrice est autorisée. Cependant, c'est au candidat de savoir la mettre en mode examen, devant les surveillants, au début de l'épreuve. L'épreuve dure 4h.*

1 Entraînement baccalauréat : hors-piste - corrigé

1.1 Fonctions : 5 points

1. Soit n un entier naturel.

f_n est dérivable sur $[1;5]$ et pour tout réel $x \in [1;5]$:

$$f_n'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^n - nx^{n-1}\ln x}{x^{2n}} = \frac{x^{n-1}\left(1 - n\ln x\right)}{x^{2n}} = \frac{1-n\ln x}{x^{2n-(n-1)}} = \boxed{\frac{1-n\ln x}{x^{n+1}}}.$$

2. **a.** Soit un entier $n > 0$. Si $x \in [1;5]$ alors $x > 0$ donc $x^{n+1} > 0$.

De plus, $1 - n\ln(x) > 0 \Leftrightarrow 1 > n\ln(x) \Leftrightarrow \frac{1}{n} > \ln(x)$ car $n > 0 \Leftrightarrow e^{1/n} > x$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On en déduit le tableau suivant :

x	1	$e^{1/n}$	5
$f_n'(x)$	$+$	0	$-$

On en déduit que f_n est strictement croissante sur $[1;e^{1/n}]$ puis strictement décroissante sur $[e^{1/n};5]$.

Elle admet donc un maximum pour $x_n = e^{1/n}$.

b. On note A_n le point de la courbe $\mathcal{C}_n$ ayant pour ordonnée ce maximum.

L'abscisse x_n de A_n est la valeur pour laquelle $f_n'(x)$ s'annule, donc

$1 - n\ln x_n = 0 \iff x_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \in [1\ ;\ 5]$.

L'ordonnée de A_n est alors $y_n = f_n(x_n) = \dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)}{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^n} = \dfrac{\frac{1}{n}}{\mathrm{e}^1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \times \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \times \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}\ln(x_n)$.

Les points A_n appartiennent donc à la courbe Γ d'équation $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}}\ln x$.

3. **a.** Quel que soit x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,5]$, $0 \leqslant \ln x \leqslant \ln(5)$ car la fonction ln est croissante donc $\ln(1) \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(5)$ i.e. $0 \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(5)$. En divisant par x^n strictement positif, on trouve

$$0 \leqslant \frac{\ln x}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}.$$

b. $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \int_1^5 x^{-n}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^5 = \left[-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\right]_1^5 = \frac{1}{n-1}\left[-\frac{1}{5^{n-1}} - (-1)\right) = \boxed{\frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)}$.

c. L'aire cherchée est $\mathcal{A}_n = \displaystyle\int_1^5 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^5 \frac{\ln x}{x^n}\,\mathrm{d}x$.

On sait que $0 \leqslant \dfrac{\ln x}{x^n} \leqslant \dfrac{\ln 5}{x^n}$ donc par conservation de l'ordre,

$$\int_1^5 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^5 \frac{\ln x}{x^n}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^5 \frac{\ln 5}{x^n} = \ln 5 \int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln 5}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right).$$

$5 > 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 5^{n-1} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5^{n-1}}\right) = 0$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln 5}{n-1} = 0.$

Par produit : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln 5}{n-1}\left(1-\dfrac{1}{5^{n-1}}\right)=0$.

Or $\displaystyle\int_1^5 0\,\mathrm{d}x = [1]_1^5 = 1-1 = 0$.

Donc, d'après le théorème des gendarmes,

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{A}_n = 0}$.

1.2 Probabilités : 4 points

Partie A

1. L'expérience constitue un schéma de Bernoulli de paramètres $n=20;\ p=\dfrac{1}{2}$.

   En effet, les lancers sont identiques et indépendants et, pour chaque lancer, la probabilité d'envoyer à droite (issue correspondant au succès, l'autre issue étant l'échec) vaut $\dfrac{1}{2}$ si l'on se fie au manuel.

   Notons X la variable aléatoire qui compte le nombre de balles envoyées à droite.

   Comme X compte le nombre de succès, X suit donc une loi binomiale de paramètres $n=20;\ p=\dfrac{1}{2}$.

   À l'aide de la calculatrice, on obtient une probabilité de

   $$\boxed{P(X=10)\simeq 0,176}$$

   d'avoir exactement 10 balles à droite.

2. Ici, avec les mêmes notations, on calcule

   $$\boxed{P(5\leqslant X\leqslant 10) = P(X\leqslant 10) - P(X\leqslant 4)\simeq 0,582}.$$

Partie B

On cherche un intervalle $[a;b]$ centré en l'espérance $E(X)$ de X le plus petit possible tel que $P(a\leqslant X\leqslant b)\geqslant 0,95$.

Or $E(X)=np=100\times\dfrac{1}{2}=50$.

Essayons différentes valeurs de a et b centrés en 50 :

- $P(45\leqslant X\leqslant 55)\approx 0,73$
- $P(41\leqslant X\leqslant 59)\approx 0,943$
- $P(41\leqslant X\leqslant 60)\approx 0,953$

Ainsi, avec une certitude supérieure à 95%, le lanceur enverra entre 41 et 60 balles à droite.

42 étant dans cet intervalle, les doutes du joueur ne sont pas justifiés.

Partie C

On note L l'événement « la balle est liftée » et D l'événement « la balle est envoyée à droite ».

À partir des données de l'énoncé, on a $P(L \cap D) = 0,24$ et $P\left(\overline{L} \cap \overline{D}\right) = 0,235$.

Ici, on cherche $P_{\overline{L}}(D)$. Commençons par calculer $P\left(\overline{L}\right)$ à l'aide de la formule des probabilités totales :

$$P\left(\overline{L}\right) = P\left(\overline{L} \cap D\right) + P\left(\overline{L} \cap \overline{D}\right)$$

Il nous faut ainsi déterminer $P\left(\overline{L} \cap D\right)$ mais on sait, toujours d'après la formule des probabilités totales, que $P(D) = P\left(\overline{L} \cap D\right) + P\left(L \cap D\right)$. On obtient ainsi :

$$P\left(\overline{L} \cap D\right) = P(D) - P(L \cap D) = 0,5 - 0,24 = 0,26$$

Ce qui donne donc :

$$P\left(\overline{L}\right) = 0,26 + 0,235 = 0,495$$

Et, finalement :

$$\boxed{P_{\overline{L}}(D) = \frac{P\left(\overline{L} \cap D\right)}{P\left(\overline{L}\right)} = \frac{0,26}{0,495} \simeq 0,525}$$

1.3 Espace : 6 points

Partie A

1.

d est orthogonale à P donc elle est orthogonale à toute droite de ce plan et en particulier à (AC). Donc (BD) est orthogonale (AC).

(AC) est perpendiculaire à (AB) car ABC est rectangle en A.

(AC) est donc orthogonale à deux droites sécantes (BD) et (AB) du plan (BAD), on en déduit que (AC) est orthogonale au plan (BAD).

2.

d est perpendiculaire à P donc ABD et CBD sont rectangles en B.

ABC est rectangle en A d'après l'énoncé et on a montré dans la question précédente que (AC) est orthogonale au plan (BAD) donc à tout droite de ce plan, donc en particulier (AC) est perpendiculaire à (AD) en A. Le triangle ACD est rectangle comme le triangle ABC.

Finalement, toutes ses faces étant des triangles rectangles, ABCD est bien un bicoin.

3. CD est l'hypoténuse de BCD, donc le côté le plus grand : CD > CB et CD > BD ;

[CD] est l'hypoténuse de de ACD, donc CD > CA, CD > AD.

Or [AD] est l'hypoténuse de ABD donc AD > AB et d'après le résultat précédent CD > AD > AB.

Finalement [CD] est la plus longue arête du bicoin car elle est plus longue que les cinq autres.

a.

I milieu de l'hypoténuse de BCD rectangle en D est le centre du cercle circonscrit à BCD on a alors

IB = IC = ID.

De même dans ACD rectangle en A, I milieu de l'hypoténuse [CD] est le centre du cercle circonscrit à ACD et on a ID = IC = IA.

Finalement IA = IB = IC = ID, donc I est équidistant des quatre sommets du bicoin ABCD.

Partie B

1.

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$ est directeur de d donc normal à P.

Une équation cartésienne de P est donc de la forme $2x - 2y + z + d = 0$, où d est un réel à déterminer.

En utilisant le fait que $A(3; 1; -5) \in P$, on en déduit qu'une équation cartésienne de P est $P\ :\ 2x - 2y + z + 1 = 0$

2.

En posant $t = 2$ dans la représentation paramétrique de d on obtient les coordonnées de B donc $\mathrm{B} \in d$.

$2x_{\mathrm{B}} - 2y_{\mathrm{B}} + z_{\mathrm{B}} + 1 = 10 - 10 - 1 + 1 = 0$ donc $\mathrm{B} \in P$.

Finalement d et P sont bien sécantes en B

Variante : vous pouvez aussi déterminer l'intersection de d et P par la résolution du système correspondant.

3.

$2x_{\mathrm{C}} - 2y_{\mathrm{C}} + z_{\mathrm{C}} + 1 = 14 - 6 - 9 + 1 = 0$ donc $C \in P$.

$\mathrm{AC}^2 = 4^2 + 2^2 + (-4)^2 = 36$, $\mathrm{AB}^2 = 2^2 + 4^2 + 4^2 = 36$ et $\mathrm{BC}^2 = 2^2 + (-2)^2 + (-8)^2 = 72$

On a alors $\mathrm{AC}^2 + \mathrm{AB}^2 = \mathrm{BC}^2$ donc ABC est rectangle en A d'après la réciproque du théorème de Pythagore. Il est de plus isocèle en A car $AC^2 = AB^2$ i.e. $AC = AB$.

Variante : on peut aussi faire le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ pour démontrer que ABC est rectangle en A.

4. **a.**

$M \in d$ et $\mathrm{B} \in d$ donc $d = (M\mathrm{B})$.

De plus B et A sont deux points distincts de P donc (AB)$\subset P$ et on sait que d est perpendiculaire à P donc orthogonale à toute droite de P. On en déduit que $(M\mathrm{B})$ est perpendiculaire à (AB).

Finalement on a donc bien ABM rectangle en B

b.

$\mathrm{AB}M$ est isocèle en B si et seulement si $\mathrm{B}M = \mathrm{AB}$

$$\begin{aligned}\mathrm{B}M = \mathrm{AB} &\Leftrightarrow \mathrm{B}M^2 = \mathrm{AB}^2\\ &\Leftrightarrow (2t-4)^2 + (-2t+4)^2 + (t-2)^2 = 36\\ &\Leftrightarrow 4t^2 - 16t + 16 + 4t^2 - 16t + 16 + t^2 - 4t + 4 = 36\\ &\Leftrightarrow 9t^2 - 36t = 0\\ &\Leftrightarrow t^2 - 4t = 0\end{aligned}$$

c.

$$t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow t(t-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0\\ \text{ou}\\ t = 4\end{cases}$$

Donc $M_1(1\ ;\ 9\ ;\ -3)$ et $M_2(9\ ;\ 1\ ;\ 1)$ sont les points de la droite d tels que les triangles rectangles $\mathrm{AB}M_1$ et $\mathrm{AB}M_2$ soient isocèles en B.

Partie C

ABCD est un bicoin car ABC est rectangle en B (voir question **3.**) et D est un point de la perpendiculaire au plan (ABC) passant par B.

D'après la question **3.b.** de la **Partie A**, on sait alors que le milieu I de [CD] est équidistant des quatre sommets du bicoin.

Le centre de la sphère circonscrite à ABCD est donc I$(8\ ;\ 2\ ;\ -4)$ milieu de [CD].

Le rayon de la sphère est IC$=\sqrt{(x_C - x_I)^2 + (y_C - y_I)^2 + (z_C - z_I)^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

1.4 Suites : 5 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;u\,;v)$.

Pour tout entier $n \geqslant 4$, on considère P_n un polygone régulier à n côtés, de centre O et dont l'aire est égale à 1. On admet qu'un tel polygone est constitué de n triangles superposables à un triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$ donné, isocèle en O.

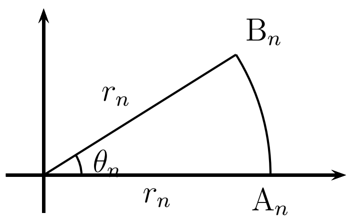
On note $r_n = \mathrm{OA}_n$ la distance entre le centre O et le sommet A_n d'un tel polygone.

Partie A– étude du cas particulier $n = 6$

1. Justifier le fait que le triangle $\mathrm{OA}_6\mathrm{B}_6$ est équilatéral, et que son aire est égale à $\dfrac{1}{6}$.
2. Exprimer en fonction de r_6 la hauteur du triangle $\mathrm{OA}_6\mathrm{B}_6$ issue du sommet B_6.
3. En déduire que $r_6 = \sqrt{\dfrac{2}{3\sqrt{3}}}$.

Partie B– cas général avec $n \geqslant 4$

Dans cette partie, on considère le polygone P_n avec $n \geqslant 4$, construit de telle sorte que le point A_n soit situé sur l'axe réel, et ait pour affixe r_n.
L'affixe de B_n a pour module r_n et pour argument θ_n, où θ_n est un réel de l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.



1. Exprimer en fonction de r_n et θ_n la hauteur issue de B_n dans le triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$ puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\dfrac{r_n^2}{2}\sin(\theta_n)$.
2. On rappelle que l'aire du polygone P_n est égale à 1.
   Donner, en fonction de n, une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}_n},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}_n}\right)$, puis démontrer que :
   $$r_n = \sqrt{\dfrac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}}$$

Partie C– étude de la suite (r_n)

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$ par : $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$.

On admet que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$.

1. *(Question ajoutée).* Justifier que le nombre r_n, défini dans la partie B pour $n \geqslant 4$, s'exprime à l'aide de la fonction f par : $\boxed{r_n = \sqrt{\dfrac{1}{\pi} f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}}$
2. Montrer que la suite (r_n) est décroissante. On pourra pour cela commencer par démontrer que pour tout $n \geqslant 4$, on a : $0 < \dfrac{2\pi}{n+1} < \dfrac{2\pi}{n} < \pi$.
3. En déduire que la suite (r_n) converge.
4. *Question ajoutée.* On admet dans la suite de l'exercice que la limite L de (r_n) est $L = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.
   En déduire la limite de f quand x tend vers 0.
5. Écrire une fonction de programmation permettant de déterminer le premier rang n tel que $r_n \leqslant 0,58$.

Partie A : étude du cas particulier $n = 6$

1. P_6 est un hexagone régulier.

   Pour $n = 6$, l'angle $\left(\overrightarrow{OA_6}\ ;\ \overrightarrow{OB_6}\right) = \dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$.

   Variante : l'angle mesure $\dfrac{1}{6}$ *de* 360 *degrés, soit* 60 *degrés.*

   Le triangle OA_6B_6 est isocèle et a un angle principal de $\dfrac{\pi}{3}$: il est **équilatéral**.

   Son aire vaut $\dfrac{1}{6}$ car le polygone est formé de six triangles identiques et son aire vaut 1.

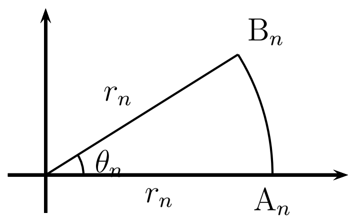
2. $OA_6 = 0B_6 = r_6$; la hauteur h_6 du triangle OA_6B_6 vaut $\boxed{r_6 \sin\dfrac{\pi}{3} = r_6\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

3. L'aire du triangle vaut $\mathscr{A}_6 = \dfrac{r_6 \times h_6}{2} = \dfrac{1}{6}$ donc $\dfrac{r_6^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1}{6}$.

   On en déduit : $r_6^2 = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ d'où $\boxed{r_6 = \sqrt{\dfrac{2}{3\sqrt{3}}}}$

Partie B : cas général avec $n \geqslant 4$

Dans cette partie, on considère le polygone P_n avec $n :\geqslant 4$, construit de telle sorte que le point A_n soit situé sur l'axe réel, et ait pour affixe r_n.
On note alors $r_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}$ l'affixe de B_n où θ_n est un réel de l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.



1. La hauteur h_n du triangle OA_nB_n est $h_n = OB_n \sin\theta_n = \boxed{r_n \sin\theta_n}$.

   L'aire de ce triangle est alors : $\mathscr{A}_n = \dfrac{r_n \times h_n}{2} = \dfrac{r_n^2 \sin\theta_n}{2} = \boxed{\dfrac{r_n^2}{2}\sin\theta_n}$.

2. On rappelle que l'aire du polygone P_n est égale à 1.

   Puisque l'on a n triangles identiques superposables, on a $n\theta_n = 2\pi$ donc $\boxed{\theta_n = \dfrac{2\pi}{n}}$

   L'aire de chaque triangle vaut $\dfrac{1}{n}$ donc $\dfrac{r_n^2}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) = \dfrac{1}{n}$ d'où $r_n^2 = \dfrac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}$ et donc $\boxed{r_n = \sqrt{\dfrac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}}}$

Partie C : étude de la suite (r_n)

1. $\sqrt{\dfrac{1}{\pi}f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)} = \sqrt{\dfrac{1}{\pi}\dfrac{2\pi/n}{sin(2\pi/n)}} = \sqrt{\dfrac{2/n}{sin(2\pi/n)}} = \sqrt{\dfrac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}} = r_n$

2. Pour tout $n \geqslant 4$, $0 < 3 < n < n+1 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{3}$ car la fonction inverse est strictement décroiss

   $0 < \dfrac{2\pi}{n+1} < \dfrac{2\pi}{n} < \dfrac{2\pi}{3} < \pi$.

   Comme la fonction f est croissante sur $]0\ ;\ \pi[$, on en déduit :

   $0 < f\left(\dfrac{2\pi}{n+1}\right) < f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{\pi}f\left(\dfrac{2\pi}{n+1}\right) < \dfrac{1}{\pi}f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$

$\Rightarrow 0 < \sqrt{\dfrac{1}{\pi} f\left(\dfrac{2\pi}{n+1}\right)} < \sqrt{\dfrac{1}{\pi} f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}$

Ainsi $\boxed{0 < r_{n+1} < r_n}$. La suite (r_n) est bien **décroissante** pour $n \geqslant 4$.

3. La suite (r_n) est décroissante et minorée par 0, donc **convergente** vers un réel $L \geqslant 0$.

4. Comme f est continue, la limite de $v_n = f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$ en $+\infty$ est la limite de f quand x tend vers 0.

Remarquons par ailleurs que $r_n = \sqrt{\dfrac{1}{\pi} v_n} \Leftrightarrow v_n = \pi r_n^2$.

Donc, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que la limite de (v_n) est 1.
Donc la limite de f quand x tend vers 0 est 1.
Dit autrement, x et $\sin(x)$ sont très proches quand x est proche de 0 !

5. On considère la fonction de programmation suivante.

```
définir fct() :
        n prend la valeur 4
        Tant que sqrt(2 / (n sin(2π/n))) > 0,58 faire
            n prend la valeur n + 1
        Fin Tant que
        renvoyer n
```

Pour nifnormation, à la calculatrice, on obtient :

- $r_{10} \approx 0,5833 > 0,58$
- $r_{11} \approx 0,5799 < 0,58$

L'algorithme va donc afficher $\boxed{n = 11}$.

---

labo maths sénonais
labo-maths.janot@ac-dijon.fr