Fonctions : 5 points

Partie I

1. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0}x=0^+\end{array}\right\}$ par quotient, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x)}{x}=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=-\infty$.

2. D'après le théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=1$.

3. h est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et pour tout $x>0$, $h'(x)=0+\dfrac{1/x\times x-\ln(x)\times 1}{x^2}=\dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$.

4. Soit $x\in]0\ ;\ +\infty[$,
$1-\ln(x)\geqslant 0\Leftrightarrow 1\geqslant\ln(x)\Leftrightarrow \mathrm{e}\geqslant x$ par croissance de la fonction exponentielle sur $]0\ ;\ +\infty[$.
$x^2>0$.
$h(\mathrm{e})=1+\dfrac{\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}}=1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. Les limites ont été calculées dans les questions 1 et 2.
On en déduit le tableau de signes de h' puis le tableau de variations de h sur $]0\ ;\ +\infty[$:

x	0		e		$+\infty$
$1-\ln(x)$		$+$	0	$-$	
x^2	0	$+$		$+$	
$h'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	1+1/e	$\searrow$	1

5. h est continue sur $]0\ ;\ +\infty[$ car dérivable sur cet intervalle.
$\lim\limits_{x\to 0}h(x)=-\infty<0$ et $h(\mathrm{e})=1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}>0$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x)=0$ admet au moins une solution sur $]0\ ;\ \mathrm{e}]$.
De plus, h est strictement croissante sur $]0\ ;\ \mathrm{e}]$ donc d'après le théorème de la bijection, cette solution est unique.
Sur l'intervalle $[\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$, h est strictement positive donc l'équation $h(x)=0$ n'admet pas de solution.
Conclusion : L'équation $h(x)=0$ admet une unique solution sur $]0\ ;\ +\infty[$.
Comme $h(0,5)\approx-0,4$ et $h(0,6)\approx 0,1$, on en déduit que $0,5<\alpha<0,6$.

Partie II

1. Le coefficient directeur de D_a est le nombre dérivé de g en a donc est $\ln'(a)=\dfrac{1}{a}$.

2. De la même manière, il faut dériver f. f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et pour tout $x>0$, $f'(x)=1\times\ln(x)+x\times\dfrac{1}{x}-1=\ln(x)+1-1=\ln(x)$. Ainsi, le coefficient directeur de T_a est $f'(a)=\ln(a)$.

3. On cherche à montrer qu'il existe une unique valeur a à l'équation $f'(a)\times g'(a)=-1$:
$f'(a)\times g'(a)=\dfrac{\ln(a)}{a}$ donc $f'(a)\times g'(a)=-1\Leftrightarrow\dfrac{\ln(a)}{a}=-1\Leftrightarrow\dfrac{\ln(a)}{a}+1=0\Leftrightarrow h(a)=0$.
D'après la question 5 de la partie I, cette équation admet une unique solution α.
Par conséquent, ce n'est qu'au point d'abscisse $a=\alpha$ que les tangentes des deux courbes seront perpendiculaires.

Espace : 5 points

1. **a.** La hauteur issue de E est (AE) car elle est orthogonale à (AB) et à (AC) qui sont deux droites sécantes de (ABC) donc (AE) est orthogonale à (ABC).
La hauteur issue de C est (CB) car (CB) est orthogonale à (AB) et à (AE) qui sont sécantes dans (ABE). Le raisonnement est le même que précédemment.

   b. Les droites (AE) et (CB) ne sont pas coplanaires (le point E n'appartient pas au plan (ABC)) donc elles ne sont pas sécantes. Par conséquent, les hauteurs ne sont pas concourantes.

2. **a.** On note P le plan d'équation cartésienne $x - y + z = 0$. Montrons que les trois points appartiennent à ce plan :
A$(0;0;0)$: $x_A - y_A + z_A = 0 - 0 + 0 = 0$ donc A$\in P$;
C$(1;1;0)$: $x_C - y_C + z_C = 1 - 1 + 0 = 0$ donc C$\in P$;
H$(0;1;1)$: $x_H - y_H + z_H = 0 - 1 + 1 = 0$ donc H$\in P$.
Donc A, C et H appartiennent à P et comme ils définissent un plan d'après l'énoncé, P est le plan (ACH).
L'équation $x - y + z = 0$ est donc bien une équation cartésienne de (ACH).

   b. On détermine $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ un vecteur normal à (ACH) d'après l'équation cartésienne de la question précédente.
F$(1;0;1)$ et D$(0;1;0)$ donc $\overrightarrow{\text{FD}}\begin{pmatrix}0-1\\1-0\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} = -\vec{n}$. Comme $\overrightarrow{\text{FD}}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires alors (FD) est une droite orthogonale à (ACH) passant par F, c'est donc la hauteur issue de F du tétraèdre ACHF.

   c. (FD) est la hauteur issue de F, (CE) est la hauteur issue de C, (HB) est la hauteur issue de H et (AG) est la hauteur issue de A. Ces quatre droites sont les grandes diagonales du cube, elles sont donc concourantes d'après l'énoncé.

Partie B Une propriété des tétraèdres orthocentriques

1. **a.** (MK) est orthogonale à (NPQ) et (PQ) est une droite incluse dans (NPQ) donc (MK) est orthogonale à (PQ).

   b. (PQ) est orthogonale à (MK) et à (NK) donc (PQ) est orthogonale à deux droites sécantes de (MNK). Par conséquent, (PQ) est orthogonale à (MNK).

2. (PQ) est orthogonale à (MNK) donc (PQ) est orthogonale à toute droite incluse dans (MNK). En particulier, (PQ) est orthogonale à (MN) et donc [PQ] est orthogonal à [MN].

Partie C : Application

Si RSTU est orthocentrique alors les arêtes opposées sont orthogonales deux à deux.

$\overrightarrow{\text{RS}}\begin{pmatrix}1-(-3)\\4-5\\-2-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-1\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{TU}}\begin{pmatrix}4-4\\7-(-1)\\3-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\8\\-2\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{\text{RS}}.\overrightarrow{\text{TU}} = 4\times 0 + (-1)\times 8 + (-4)\times(-2) = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{\text{RS}}$ et $\overrightarrow{\text{TU}}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{\text{RT}}\begin{pmatrix}4-(-3)\\-1-5\\5-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-6\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{SU}}\begin{pmatrix}4-1\\7-4\\3-(-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\5\end{pmatrix}$.

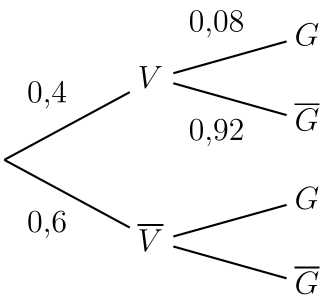
$\overrightarrow{\text{RT}}.\overrightarrow{\text{SU}} = 7\times 3 + (-6)\times 3 + 3\times 5 = 18 \neq 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{\text{RS}}$ et $\overrightarrow{\text{TU}}$ ne sont pas orthogonaux. Par conséquent, RSTU n'est pas orthocentrique.

Remarque : Si les arêtes avaient été deux à deux orthogonales, on n'aurait quand même pas pu affirmer que RSTU était orthocentrique parce que la propriété obtenue à la partie B est une implication (dont on utilise ici la contraposée) et non une équivalence.

Probabilités : 5 points

Partie A

1. D'après l'énoncé,



2. $P(V \cap G) = P(V) \times P_V(G) = 0,4 \times 0,08 = 0,032$.
   La probabilité que la personne choisie ait la grippe et soit vaccinée est 0,032.
3. On cherche $P_{\overline{V}}(G) = \dfrac{P(\overline{V} \cap G)}{P(\overline{V})}$.
   D'après la formule des probabilités totales, $P(G) = P(\overline{V} \cap G) + P(V \cap G)$
   donc $P(\overline{V} \cap G) = P(G) - P(V \cap G) = 0,2 - 0,032 = 0,168$.
   De plus, $P(\overline{V}) = 1 - P(V) = 0,6$.
   Ainsi, $P_{\overline{V}}(G) = \dfrac{0,168}{0,6} = 0,28$.
   On en déduit que la probabilité qu'une personne non vaccinée contracte la grippe est égale à $0,28$.

Partie B

1. Les n expériences sont considérées comme identiques et indépendantes.
   À chaque expérience, il y a deux issues :
   - le succès V de probabilité 0,4 ;
   - l'échec $\overline{V}$.
   X compte le nombre de succès donc X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,4$.
2. **a.** D'après la calculatrice, $P(X = 15) \approx 0,123$.
   b. D'après la calculatrice, $P(X \geqslant 20) \approx 0,130$.
   c. $E(X) = 16$. On cherche donc un intervalle $[a\ ;\ b]$ contenant 95% des valeurs pour lequel $E(X)$ est au centre. On cherche donc a tel que $P(X < a) \approx 0,025$ et $P(X \leqslant b) \approx 0,975$. D'après la calculatrice, $[a\ ;\ b] = [10\ ;\ 22]$.

Suites : 5 points

Partie A :

1. $a_1 = 0,85 \times a_0 + 450 = 0,85 \times 200 + 450 = 620$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, a_n est le nombre de personnes qui télétravaillent le $n^{\text{ème}}$ mois après mai 2020. Pour connaître le nombre de télétravailleurs le mois suivant, il faut donc en garder 85% et leur ajouter les 450 qui commencent. On en déduit que $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.
3. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = a_n - 3000$ donc $a_n = v_n + 3000$ et $v_{n+1} = a_{n+1} - 3000 = 0,85a_n + 450 - 3000 = 0,85a_n - 2550 = 0,85(v_n + 3000) - 2550 = 0,85v_n + 0,85 \times 3000 - 2550 = 0,85v_n$.
   Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,85 et de premier terme
   $v_0 = a_0 - 3000 = -2800$.
   b. De la question précédente, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = -2800 \times 0,85^n$.
   c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = v_n + 3000 = -2800 \times 0,85^n + 3000$.

4. On cherche le plus petit entier naturel n tel que : $a_n > 2500$.

$$\begin{array}{ll} & a_n > 2500 \\ \Leftrightarrow & -2800 \times 0,85^n + 3000 > 2500 \\ \Leftrightarrow & -2800 \times 0,85^x > -500 \\ \Leftrightarrow & 0,85^n < 5/28 \\ \Leftrightarrow & \ln(0,85^n) < \ln(5/28) \qquad \text{par croissance de la fonction ln sur }]0\ ;\ +\infty[\\ \Leftrightarrow & n\ln(0,85) < \ln(5/28) \\ \Leftrightarrow & n > \dfrac{\ln(5/28)}{\ln(0,85)} \end{array}$$

Or $\dfrac{\ln(5/28)}{\ln(0,85)} \approx 10,6$ donc il faut attendre 11 mois pour que le nombre de télétravailleurs soit strictement supérieur à 2500 après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

Partie B :

1. f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et pour tout $x \geqslant 0$,
$f'(x) = \dfrac{5(x+2)-(5x+4)\times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{5x+10-5x-4}{(x+2)^2} = \dfrac{6}{(x+2)^2}$.
Pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$

2. **a.** Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

Initialisation : Pour $n = 0$:
D'une part, $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{5\times 1+4}{1+2} = 3$.
D'autre part, $0 \leqslant 1 \leqslant 3 \leqslant 4$.
Donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$ et la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Soit k un entier naturel, on suppose que la propriété est vraie au rang k c'est-à-dire $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 4$. Montrons que la propriété est vraie au rang $k+1$ c'est-à-dire $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 4$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 4$.
Donc $f(0) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(4)$ par croissance de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
Or $f(0) = 2 \geqslant 0$ et $f(4) = 4$ donc $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 4$ et la propriété est vraie au rang $k+1$.

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc (u_n) est croissante.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 4$ donc (u_n) est majorée par 4.
Par conséquent, (u_n) est croissante et majorée donc converge vers une limite l.
Pour info : Il faut résoudre l'équation $f(x) = x$ pour trouver la valeur de l (non demandée ici) et les plus courageux trouveront $l = 4$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$.
Comme $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$.
D'après les théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} 4 - u_n = 0$.
On en déduit que la limite de (u_n) est 4.
Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif se rapprochera de 4000 au bout d'un grand nombre de mois.