Sélection non exhaustive et totalement subjective d'exercices repris du site de l'APMEP pour préparer le baccalauréat. *Rappel : la calculatrice est autorisée. Cependant, c'est au candidat de savoir la mettre en mode examen, devant les surveillants, au début de l'épreuve. L'épreuve dure 4h.*

1 Entraînement baccalauréat : piste verte

1.1 Fonctions : 5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \dfrac{3}{x}$, où ln désigne la fonction logarithme népérien. On note $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1. On a une FI donc on factorise par x :

$$f(x) = x \times (1 + \frac{4}{x} - 4\frac{\ln(x)}{x} - \frac{3}{x^2})$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée.

Par somme : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{4}{x} - 4\frac{\ln(x)}{x} - \frac{3}{x^2} = 1$

Par produit : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

Démontrer que, pour tout nombre réel $x > 0$, on a : $f'(x) = 1 + 0 - 4 \times \dfrac{1}{x} - 3 \times \dfrac{-1}{x^2}$

On met sous le même dénominateur qui est ici x^2 :

$$f'(x) = \frac{x^2}{x^2} - \frac{4x}{x^2} + 3 \times \frac{1}{x^2}$$

On a alors : $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$.

3. **a.** On doit étudier le signe de la dérivée. On étudie le signe du trinôme $x^2 - 4x + 3$:

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4 > 0$

On a alors deux solutions : $x_1 = \dfrac{4-2}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{4+2}{2} = 3$.

On obtient le tableau de signe suivant :

x	0		1		3		$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

x	0		1		3		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$6 - 4\ln(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

b. $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet 3 solutions sur $]0; +\infty[$.

4. Il faut étudier le signe de la dérivée seconde. On dérive f' qui est un quotient :
$u(x) = x^2 - 4x + 3$ et donc $u'(x) = 2x - 4$
$v(x) = x^2$ et donc $v'(x) = 2x$

$$f''(x) = \frac{(2x-4)(x^2) - 2x(x^2-4x+3)}{(x^2)^2} = \frac{2x^3 - 4x^2 - 2x^3 + 8x^2 - 6x}{x^4} = \frac{4x^2 - 6x}{x^4} = \frac{x(4x-6)}{x^4}$$

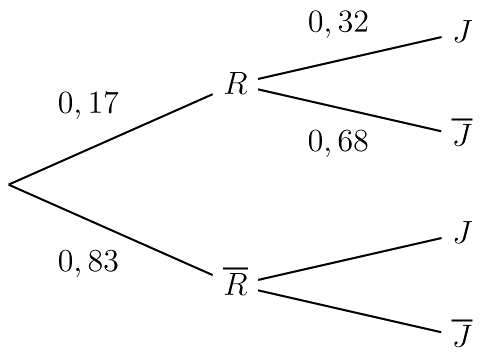
Dès lors $f''(x) = \dfrac{4x-6}{x^3}$

x	0		1.5		$+\infty$
$4x-6$		$-$	0	$+$	
x^3	0	$+$		$+$	
$f''(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

f est concave sur $]0; 1,5]$ et convexe sur $[1,5; +\infty[$.
$f(1,5) = 1,5 + 4 - 4\ln(1,5) - \dfrac{3}{1,5} = 3,5 - 4\ln(1,5)$
Elle admet un point d'inflexion qui a pour coordonnées $(1,5\ ;\ 3,5 - 4\ln(1,5))$

1.2 Probabilités : 5 points

Partie A :

1. 

2. $P(R \cap J) = 0,17 \times 0,32 = 0,054$.
3. On nous donne : $P(J) = 0,11$
D'après la formule des probabilités totales : $P(J) = P(R \cap J) + P(\overline{R} \cap J)$
On a : $0,11 = 0,054 + P(\overline{R} \cap J)$
Dès lors : $P(\overline{R} \cap J) = 0,11 - 0,054 = 0,056$
4. On cherche $P_{\overline{R}}(J) = \dfrac{P(\overline{R} \cap J)}{P(\overline{R})} = \dfrac{0,056}{0,83} \simeq 0,067$

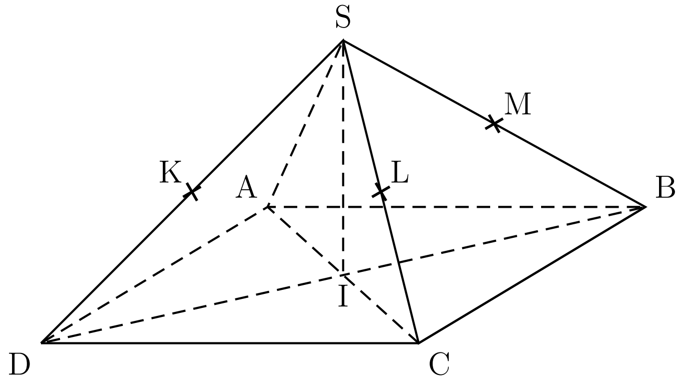
Partie B :

1. On a une épreuve de Bernoulli de succès : "la personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun" de probabilité $p = 0,17$.
Cette épreuve est répétée de façon indépendante et identique 50 fois.
X suit une loi binomiale de paramètres $p = 0,17$ et $n = 50$.
2. $P(X = 5) \simeq 0,069$. La probabilité d'obtenir exactement 5 personnes utilisant les transports en commun sur les 50 est de $0,069$.
3. $P(X \leqslant 13) \simeq 0,964$. Il a raison.
4. Le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées est $50 \times 0,17 = 8,5$

1.3 Espace : 5 points

Autre exercice possible : exercice 3 du sujet de Asie, 7 juin 2021

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.

Le point I est le centre du carré ABCD.

On suppose que : IC = IB = IS = 1.

Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) $\boxed{\textbf{c.}\ \text{(AC) et (SB)}}$ **d.** (LM) et (AD)

> On procède par élimination.
> - Les droites (DK) et (SD) sont sécantes en D donc coplanaires ; on élimine **a.**
> - Les droites (AS) et (IC) sont sécantes en A donc coplanaires ; on élimine **b.**
> - Les droites (LM) et (AD) sont toutes deux parallèles à (BC) donc parallèles entre elles ; elles sont donc coplanaires ; on élimine **d.**
>
> **Réponse c.**

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(\text{I}\ ;\ \overrightarrow{\text{IC}},\ \overrightarrow{\text{IB}},\ \overrightarrow{\text{IS}}\right)$.

Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

$$\text{I}(0\ ;\ 0\ ;\ 0)\ ;\ \text{A}(-1\ ;\ 0\ ;\ 0)\ ;\ \text{B}(0\ ;\ 1\ ;\ 0)\ ;\ \text{C}(1\ ;\ 0\ ;\ 0) ; \text{D}(0\ ;\ -1\ ;\ 0)\ ;\ \text{S}(0\ ;\ 0\ ;\ 1).$$

2. Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

a. $\left(\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\right)$ $\boxed{\textbf{b.}\ \left(\frac{1}{4}\ ;\ -\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right)}$ **c.** $\left(-\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$

> - Le milieu K de [SD] a pour coordonnées $\left(0\ ;\ -\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.
> - Le milieu L de [SC] a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.
> - Le milieu N de [KL] a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\ ;\ -\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.
>
> **Réponse b.**

3. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{AS}}$ sont :

a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\boxed{\textbf{b.} \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

> **Réponse b.**

4. Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

a. $\left\{\begin{array}{lcr} x & = & -1-t\\ y & = & t\\ z & = & -t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$

b. $\left\{\begin{array}{lcr} x & = & -1+2t\\ y & = & 0\\ z & = & 1+2t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$

$\boxed{\textbf{c.} \left\{\begin{array}{lcr} x & = & t\\ y & = & 0\\ z & = & 1+t\end{array}\right. (t \in \mathbb{R})}$

d. $\left\{\begin{array}{lcr} x & = & -1-t\\ y & = & 1+t\\ z & = & 1-t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$

> La droite (AS) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; la seule représentation qui convienne est la c.
>
> **Réponse c.**

5. Une équation cartésienne du plan (SCB) est :

a. $y+z-1=0$ $\boxed{\textbf{b.}\ x+y+z-1=0}$ **c.** $x-y+z=0$ **d.** $x+z-1=0$

> On procède par élimination.
> - Le plan d'équation $y+z-1=0$ ne contient pas C$(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$; on élimine **a.**
> - Le plan d'équation $x-y+z=0$ ne contient pas S$(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$; on élimine **c.**
> - Le plan d'équation $x+z-1=0$ ne contient pas B$(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$; on élimine **d.**
>
> **Réponse b.**

1.4 Suite : 5 points

Partie I : modèle discret

1. $u_1 = u_0 + 0,05\,(20-u_0) \ = 1+0,05\,(20-1) \ = 1,95.$

2. **a.** $u_{n+1} = u_n + 0,05\times 20 - 0,05u_n = 0,95u_n + 1.$

b. $v_{n+1} = 20 - u_{n+1} = 20-(0,95u_n+1) = 20-0,95u_n-1 = 19-0,95u_n$

En factorisant par $0,95$: $v_{n+1} = 0,95(20-u_n) = 0,95v_n$

Variante : on peut utiliser la relation $u_n = 20 - v_n$
Cela donne : $v_{n+1} = 19-0,95(20-v_n) = 19-19+0,95v_n = 0,95v_n$

La suite (v_n) est géométrique de raison $0,95$ et de premier terme $v_0 = 20-u_0 = 20-1 = 19$

c. Comme (v_n) est géométrique, on a pour tout entier naturel n, $v_n = v_0\times q^n = 19\times 0,95^n$.
Par conséquent : $u_n = 20-v_n = 20-19\times 0,95^n$.

3. Comme $0,95 \in]-1;1[$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0,95^n = 0$

Par produit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} -19\times 0,95^n = 0$

Par somme : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 20$

Partie II : modèle continu

$L(t) = 20 - 19\mathrm{e}^{-0,05t}$.

1. $L(0) = 20 - 19\mathrm{e}^{-0,05\times 0} = 20 - 19\mathrm{e}^{0} = 20 - 19 = 1$.
2. On prend cette fonction L comme modèle et on admet que, si on note L' sa fonction dérivée, $L'(t)$ représente la vitesse de croissance du bambou à l'instant t.
   a. $L'(t) = 0 - 19 \times (-0,05)\mathrm{e}^{-0,05t} = 0,95\mathrm{e}^{-0,05t}$

   $L'(0) = 0,95$ et $L'(5) = 0,95\mathrm{e}^{-0,05\times 5} \simeq 0,74$ donc $L'(0) > L'(5)$.

   b. $\lim\limits_{t\to+\infty} -0,05t = -\infty$ et $\lim\limits_{T\to-\infty} \mathrm{e}^{T} = 0$ donc par composition : $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,05t} = 0$

   Par produit : $\lim\limits_{t\to+\infty} F'(t) = 0$.

   Ce résultat est en cohérence avec la description du modèle de croissance exposé au début de l'exercice car la vitesse de croissance tend vers 0. Plus le bambou grandit et plus sa vitesse de croissance ralentie. Donc la vitesse de croissance est proportionnelle à l'écart entre la taille et la taille maximale.