2 Entraînement baccalauréat : piste bleue

2.1 Fonctions : 5 points

1. On lit $f'(0) = 0,4 = \frac{2}{5}$.

2. **a.** D'après le graphique fourni :
- $f'(x)$ est croissante si $x \in [-2 ; 1]$;
- $f'(x)$ est décroissante si $x < -2$ et si $x > 1$.

b. • $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

Donc $f''(x) > 0$ sur l'intervalle $[-2 ; 1]$; la fonction f est convexe sur l'intervalle $[-2 ; 1]$.

Partie II : étude de fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)$.

1. • On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + x + \frac{5}{2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc par composées $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

• On a $x^2 + x + \frac{5}{2} = x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2}\right)$.

Donc $f(x) = \ln\left(x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2}\right)\right) = \ln(x^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2}\right)$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5}{2x^2} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2}\right) = \ln 1 = 0$.

Finalement :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln x^2 = +\infty$.

2. On a $f(x) = \ln(u(x))$, avec $u(x) = x^2 + x + \frac{5}{2}$.

u étant dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour le trinôme $x^2 + x + \frac{5}{2}$, on a $\Delta = 1 - 10 = -9 < 0$ et un coefficient dominant de $1 > 0$, donc

$x^2 + x + \frac{5}{2} > 0$ quel que soit le réel x.

La fonction $\ln u$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle : $(\ln u)' = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x+1}{x^2 + x + \frac{5}{2}}$.

3. On a vu que $x^2 + x + \frac{5}{2} > 0$ sur $\mathbb{R}$; le signe de $f'(x)$ est donc celui de $2x + 1$:

$f'(x) \geqslant 0 \iff 2x + 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -\frac{1}{2}$ ainsi la fonction f est croissante sur $\left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

On a $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) = \ln\frac{9}{4}$.

D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$\ln\frac{9}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. **a.** Dans la tableau précédent $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{9}{4} \approx 0,81 < 2$.

Sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ la fonction f est continue car dérivable et comme $2 \in \left[\ln\frac{9}{4}\ ;\ +\infty\right[$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires au moins un réel $\alpha \in \left[-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ tel que $f(\alpha) = 2$. Or, sur cet intervalle, f est strictement croissante, donc d'après le théorème de la bijection, α est unique.

b. La calculatrice donne :
$f(1) \approx 1,5$ et $f(2) \approx 2,14$, donc $\alpha \in]1\ ;\ 2[$;
$f(1,7) \approx 1,96$ et $f(1,8) \approx 2,02$, donc $\alpha \in]1,7\ ;\ 1,8[$;
$f(1,76) \approx 1,995$ et $f(1,77) \approx 2,002$, donc $\alpha \in]1,76\ ;\ 1,77[$.
Conclusion $\alpha \approx 1,8$ à 10^{-1} près.

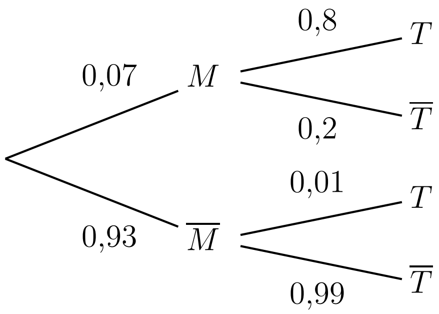
5. La courbe d'une fonction admet un point d'inflexion si en ce point la dérivée seconde de la fonction s'annule en changeant de signe.
Pour le trinôme $-2x^2 - 2x + 4$, on a $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-2) \times 4 = 4 + 32 = 36 > 0$
donc ses racines sont $x_1 = \dfrac{-(-2) - 6}{2 \times (-2)} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-(-2) + 6}{2 \times (-2)} = -2$;
et il est du signe de son coefficient dominant en dehors de $[-2\,;1]$.
Comme $\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2 > 0$, quel que soit le réel x, le signe de $f''(x)$ est celui du numérateur $-2(x^2 + x - 2)$. On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On constate que la dérivée seconde s'annule en changeant de signe en -2 et en 1. La courbe a donc deux points d'inflexion.

2.2 Probabilités : 5 points

1. On construit un arbre pondéré modélisant la situation proposée :



2. **a.** On a $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$.

b. On a de même $P\left(\overline{M} \cap T\right) = P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,93 \times 0,01 = 0,0093$.
D'après la formule des probabilités totales :
$P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0,056 + 0,0093 = 0,0653$.

3. On calcule $P_T(M) = \dfrac{P(T \cap M)}{P(T)} = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,056}{0,0653} \approx 0,85758$ soit $0,86$ à 10^{-2} près.

4. **a.** X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,0653$ car on a répété 10 fois de manière identique et indépendante une expérience à deux issues de probabilité de succès $0,0653$.

b. On a $P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1 - 0,0653)^{10-2} = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times 0,9347^8 \approx 0,1118$ soit $0,11$ à 10^{-2} près.

5. On pose Y la variable aléatoire qui comptabilise le nombre d'individus ayant un test positif parmi n personnes. Y suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,0653$ car on a répété n fois de manière identique et indépendante une expérience à deux issues de probabilité de succès $0,0653$.
On a $P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,0653^0 \times (1 - 0,0653)^n = 1 - 0,9347^n$
et : $P(X \geqslant 1) > 0,99 \iff 1 - 0,9347^n > 0,99 \iff 0,01 > 0,9347^n$ soit en appliquant le logarithme népérien qui est strictement croissant sur $]0\,;+\infty[$:
$\ln 0,01 > n \ln 0,9347 \iff \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,9347} < n$. Or $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,9347} \approx 68,2$.
Il faut donc tester au moins 69 personnes.

2.3 Espace : 5 points

1. $\overrightarrow{AB} : \begin{pmatrix} 3-2 \\ -1-(-1) \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} : \begin{pmatrix} 0-2 \\ 4-(-1) \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times (-2) + 0 \times 5 + 1 \times 2 = 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.
A est commun aux deux vecteurs donc $(AB) \perp (AC)$. Le triangle ABC est alors rectangle en A.

2. **a.** Soit le vecteur $\overrightarrow{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc ce sont deux vecteurs directeurs du plan (ABC).

- $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 1 + 1 \times 0 + (-1) \times 2 = 0$;
- $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-2) + 1 \times 5 + (-1) \times 1 = -4 + 5 - 1 = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), donc il est normal au plan (ABC).

b. Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc le plan (ABC) a une équation cartésienne de la forme : $2x + 1y + (-1)z + d = 0$ soit $2x + y - z = d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$.
$\text{A} \in (\text{ABC})$ donc $2x_{\text{A}} + y_{\text{A}} - z_{\text{A}} + d = 0$, c'est-à-dire $4 - 1 + 0 + d = 0$, donc $d = -3$.
Le plan (ABC) a pour équation : $2x + y - z - 3 = 0$.

c. $2x_{\text{S}} + y_{\text{S}} - z_{\text{S}} - 3 = 0 + 1 - 4 - 3 = -6 \neq 0$ donc $\text{S} \notin (\text{ABC})$ donc les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

3. Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S. Elle coupe le plan (ABC) en H.

a. La droite (d) est orthogonale au plan (ABC) donc elle a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{n}$. De plus elle contient le point S $(0\ ;\ 1\ ;\ 4)$.
Donc elle a pour représentation paramétrique :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 0 + 2 \times t \\ y &=& 1 + 1 \times t \\ z &=& 4 + (-1) \times t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{soit} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2t \\ y &=& 1 + t \\ z &=& 4 - t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$$

b. Le point H est l'intersection de la droite (d) et du plan (ABC), donc ses coordonnées vérifient le système :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2t \\ y &=& 1 + t \\ z &=& 4 - t \\ 2x + y - z - 3 &=& 0 \end{array}\right.$$
Donc : $2\,(2t) + (1 + t) - (4 - t) - 3 = 0$, c'est-à-dire $4t + 1 + t - 4 + t - 3 = 0$ soit $t = 1$.
Pour $t = 1$, on aura $x = 2 \times 1 = 2$, $y = 1 + 1 = 2$ et $z = 4 - 1 = 3$.
Les coordonnées du point H sont donc $(2\ ;\ 2\ ;\ 3)$.

4. On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est $\mathcal{V} = \dfrac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

- La base est le triangle ABC rectangle en A dont l'aire vaut $\mathcal{A} = \dfrac{\text{AB} \times \text{AC}}{2}$.
  $\text{AB}^2 = 1^2 + 0^2 + 2^2 = 5$ donc $\text{AB} = \sqrt{5}$
  $\text{AC}^2 = (-2)^2 + 5^2 + 1^2 = 30$ donc $\text{AC} = \sqrt{30}$
  $\mathcal{A} = \dfrac{\sqrt{5} \times \sqrt{30}}{2} = \dfrac{\sqrt{150}}{2} = \dfrac{5\sqrt{6}}{2}$
- La hauteur est SH.
  $\text{SH}^2 = (2-0)^2 + (2-1)^2 + 3-4)^2 = 6$ donc $\text{SH} = \sqrt{6}$
- $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A} \times \text{SH} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{5\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{6} = 5$

5. **a.** $\overrightarrow{SA} : \begin{pmatrix} 2-0 \\ -1-1 \\ 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc $\text{SA}^2 = 2^2 + (-2)^2 + (-4)^2 = 24$ donc $\text{SA} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

   b. On indique que $\text{SB} = \sqrt{17}$.
   $\overrightarrow{SB} : \begin{pmatrix} 3-0 \\ 1-(-1) \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = 2 \times 2 + (-2) \times (-2) + (-4) \times (-2) = 18$
   Or $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = \text{SA} \times \text{SB} \times \cos\left(\widehat{\text{ASB}}\right)$
   Donc $18 = 2\sqrt{6} \times \sqrt{17} \times \cos\left(\widehat{\text{ASB}}\right)$ et donc $\cos\left(\widehat{\text{ASB}}\right) = \dfrac{18}{2\sqrt{6} \times \sqrt{17}} = \dfrac{9}{\sqrt{102}}$
   On en déduit que $\widehat{\text{ASB}} \approx 27,0^\circ$.

2.4 Suite : 5 points

1. Il faut écrire dans la cellule B3 : $\boxed{\text{=B2 - ln(B2 - 1)}}$.
2. On peut penser que la suite est décroissante et a pour limite 2.

Partie II :

1. On a $\lim\limits_{x \to 1} x - 1 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = 1$, donc par composée $\lim\limits_{x \to 1} \ln(x-1) = -\infty$
   Enfin, par somme de limites, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$.
   Remarque : : la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la représentation graphique de la fonction f.

2. **a.** Sachant que $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, $u(x)$ étant une fonction de x ne s'annulant pas sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$, on a donc :
   $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x-1-1}{x-1} = \dfrac{x-2}{x-1}$ sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$.

   b. Sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ on a bien entendu $x > 1$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du dénominateur $x - 2$:
   $x - 2 \geqslant 0 \iff x \geqslant 2$: $f'(x) \geqslant 0$ sur $]2 ; +\infty[$. D'où le tableau de variations :

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

c. La question précédente a montré que $f(2) = 2$ est le minimum de la fonction f sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$, donc a fortiori sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.
On a donc pour tout $x \geqslant 2,\ f(x) \geqslant 2$.

Partie III :

1. *Initialisation* : D'une part, l'énoncé donne $u_0 = 10$ et d'autre part $10 \geqslant 2$: la proposition est vraie au rang 0.
   Hérédité : supposons que pour un certain rang k, la propriété soit vraie, c'est à dire $u_k \geqslant 2$. Montrons que la propriété reste vraie au rang $k+1$, c'est à dire $u_{k+1} \geqslant 2$.
   Par hypothèse de récurrence, on a $u_k \geqslant 2$.
   Par croissance de la fonction f sur $[2\,;+\infty[$, on a $f(u_k) \geqslant f(2)$, c'est-à-dire $u_{k+1} \geqslant 2$.
   Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et l'hérédité fonctionne donc $u_n \geqslant 2$ pour tout entier naturel n.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculons $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n - \ln(u_n - 1) - u_n = -\ln(u_n - 1)$.
   Or d'après la question précédente, quel que soit $n \in \mathbb{N},\ \ u_n \geqslant 2$, donc $u_n - 1 \geqslant 2 - 1$, ou $u_n - 1 \geqslant 1$, donc $\ln(u_n - 1) \geqslant 0$ et enfin $-\ln(u_n - 1) \leqslant 0$.
   Conclusion : quel que soit $n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ ou $u_{n+1} \leqslant u_n$: la suite (u_n) est décroissante.
3. On a donc démontré dans les deux questions précédentes que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 2 : elle converge donc vers une limite ℓ, telle $\ell \geqslant 2$.
4. $f(\ell) = \ell \iff \ell - \ln(\ell - 1) = \ell \iff 0 = \ln(\ell - 1) \iff 1 = \ell - 1$ (par la stricte croissance de la fonction logarithme népérien sur l'ensemble des réels strictement positifs), d'où $2 = \ell$.
   La suite (u_n) converge vers le nombre 2.