Sélection non exhaustive et totalement subjective d'exercices repris du site de l'APMEP pour préparer le baccalauréat. *Rappel : la calculatrice est autorisée. Cependant, c'est au candidat de savoir la mettre en mode examen, devant les surveillants, au début de l'épreuve. L'épreuve dure 4h.*

1 Entraînement baccalauréat : piste verte

1.1 Fonctions : 5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \dfrac{3}{x}$, où ln désigne la fonction logarithme népérien. On note $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   Démontrer que, pour tout nombre réel $x > 0$, on a : $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$.
3. **a.** Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   On y fera figurer les valeurs exactes des extremums et les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   On admettra que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.
   b. Par simple lecture du tableau de variations, préciser le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$.
4. Étudier la convexité de la fonction f c'est-à-dire préciser les parties de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ sur lesquelles f est convexe, et celles sur lesquelles f est concave.
   On justifiera que la courbe $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion, dont on précisera les coordonnées.

1.2 Probabilités : 5 points

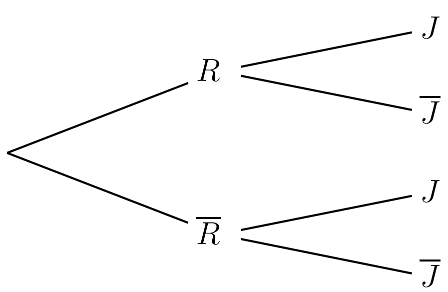
Dans tout cet exercice, les probabilités seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-3}. D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17 % de la population française. Parmi ces utilisateurs réguliers, 32 % sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans. (Source : TNS-Sofres)

Partie A :

On interroge une personne au hasard et on note :

- R l'évènement : « La personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun ».
- J l'évènement : « La personne interrogée est âgée de 18 à 24 ans ».

1. Représentez la situation à l'aide de cet arbre pondéré, que vous recopierez sur votre copie, en y reportant les données de l'énoncé.



2. Calculer la probabilité $P(R \cap J)$.

3. D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11 % de la population française. Montrer que la probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est 0,056 à 10^{-3} près.
4. En déduire la proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun.

Partie B :

Lors d'un recensement sur la population française, un recenseur interroge au hasard 50 personnes en une journée sur leur pratique des transports en commun.

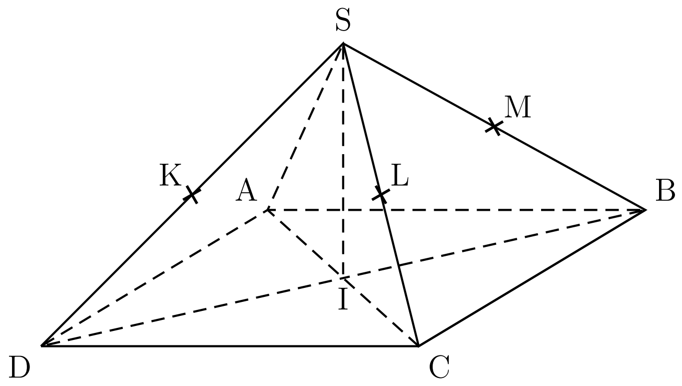
La population française est suffisamment importante pour assimiler ce recensement à un tirage avec remise. Soit X la variable aléatoire dénombrant les personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de X et préciser ses paramètres.
2. Calculer $P(X = 5)$ et interpréter le résultat.
3. Le recenseur indique qu'il y a plus de 95 % de chance pour que, parmi les 50 personnes interrogées, moins de 13 d'entre elles utilisent régulièrement les transports en commun.
   Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier votre réponse.
4. Quel est le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées ?

1.3 Espace : 5 points

Autre exercice possible : exercice 3 du sujet de Asie, 7 juin 2021

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.

Le point I est le centre du carré ABCD.

On suppose que : IC = IB = IS = 1.

Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

   a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(\text{I}\ ;\ \overrightarrow{\text{IC}},\ \overrightarrow{\text{IB}},\ \overrightarrow{\text{IS}}\right)$.

Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

$$\text{I}(0\ ;\ 0\ ;\ 0)\ ;\ \text{A}(-1\ ;\ 0\ ;\ 0)\ ;\ \text{B}(0\ ;\ 1\ ;\ 0)\ ;\ \text{C}(1\ ;\ 0\ ;\ 0); \text{D}(0\ ;\ -1\ ;\ 0)\ ;\ \text{S}(0\ ;\ 0\ ;\ 1).$$

2. Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

a. $\left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{4}\right)$ **b.** $\left(\frac{1}{4} ; -\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$ **c.** $\left(-\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 1\right)$

3. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{AS}}$ sont :

a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

4. Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

a. $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& -1-t\\ y &=& t\\ z &=& -t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$ **b.** $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& -1+2t\\ y &=& 0\\ z &=& 1+2t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$ **c.** $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& t\\ y &=& 0\\ z &=& 1+t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$ **d.** $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& -1-t\\ y &=& 1+t\\ z &=& 1-t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$

5. Une équation cartésienne du plan (SCB) est :

a. $y+z-1=0$ **b.** $x+y+z-1=0$ **c.** $x-y+z=0$ **d.** $x+z-1=0$

1.4 Suite : 5 points

Dans cet exercice, on s'intéresse à la croissance du bambou Moso de taille maximale 20 mètres.

Le modèle de croissance de Ludwig von Bertalanffy suppose que la vitesse de croissance pour un tel bambou est proportionnelle à l'écart entre sa taille et la taille maximale.

Partie I : modèle discret

Dans cette partie, on observe un bambou de taille initiale 1 mètre.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la taille, en mètre, du bambou n jours après le début de l'observation. On a ainsi $u_0 = 1$.

Le modèle de von Bertalanffy pour la croissance du bambou entre deux jours consécutifs se traduit par l'égalité : $u_{n+1} = u_n + 0,05\,(20 - u_n)$ pour tout entier naturel n.

1. Vérifier que $u_1 = 1,95$.

2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,95u_n + 1$.

b. On pose pour tout entier naturel n, $v_n = 20 - u_n$.
Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le terme initial v_0 et la raison.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 20 - 19 \times 0,95^n$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie II : modèle continu

Dans cette partie, on souhaite modéliser la taille du même bambou Moso par une fonction donnant sa taille, en mètre, en fonction du temps t exprimé en jour.

D'après le modèle de von Bertalanffy, cette fonction est la fonction L définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $L(t) = 20 - 19\mathrm{e}^{-0,05t}$.

1. Vérifier que $L(0) = 1$.

2. On prend cette fonction L comme modèle et on admet que, si on note L' sa fonction dérivée, $L'(t)$ représente la vitesse de croissance du bambou à l'instant t.

a. Comparer $L'(0)$ et $L'(5)$.

b. Calculer la limite de la fonction dérivée L' en $+\infty$.
Ce résultat est-il en cohérence avec la description du modèle de croissance exposé au début de l'exercice ?

2 Entraînement baccalauréat : piste bleue

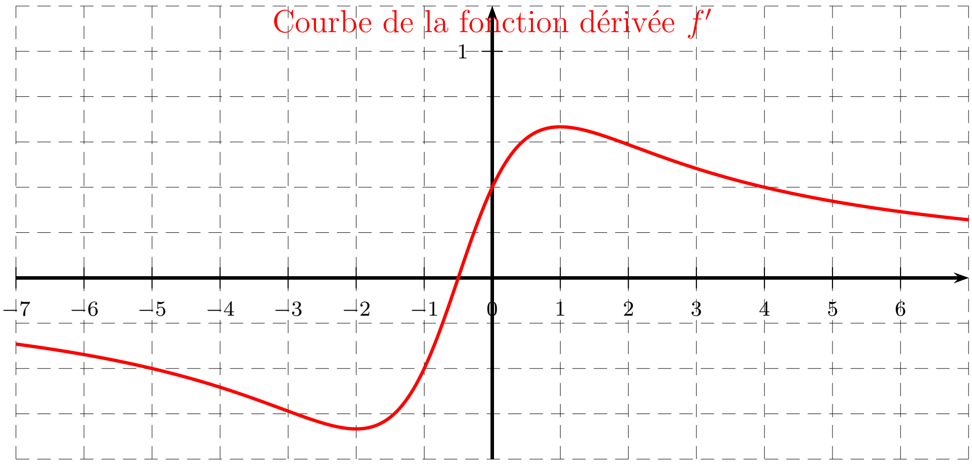
2.1 Fonctions : 5 points

Autre exercice possible, un peu plus difficile : exercice B Amérique du Nord, mai 2021

Partie I : lectures graphiques

f désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes

1. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f en 0.
2. **a.** Donner les variations de la fonction dérivée f'.

   b. En déduire un intervalle sur lequel f est convexe.

Partie II : étude de fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2 + x + \dfrac{5}{2}\right)$.

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer une expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de f pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire le tableau des variations de f. On veillera à placer les limites dans ce tableau.
4. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution α dans l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

   b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
5. La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 4}{\left(x^2 + x + \dfrac{5}{2}\right)^2}$.

   Déterminer le nombre de points d'inflexion de la courbe représentative de f.

2.2 Probabilités : 5 points

Un test est mis au point pour détecter une maladie dans un pays. Selon les autorités sanitaires de ce pays, 7 % des habitants sont infectés par cette maladie. Parmi les individus infectés, 20 % sont déclarés négatifs. Parmi les individus sains, 1 % sont déclarés positifs.

Une personne est choisie au hasard dans la population. On note :

- M l'évènement : « la personne est infectée par la maladie » ;
- T l'évènement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.

2. **a.** Quelle est la probabilité pour que la personne soit infectée par la maladie et que son test soit positif ?

b. Montrer que la probabilité que son test soit positif est de 0,0653.

3. On sait que le test de la personne choisie est positif.
Quelle est la probabilité qu'elle soit infectée ?
On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.

4. On choisit dix personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre d'individus ayant un test positif parmi les dix personnes.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.

b. Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif.
On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.

5. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins une de ces personnes ait un test positif, soit supérieure à 99 %.

2.3 Espace : 5 points

Autre exercice possible : exercice II) Asie, 8 juin 2021

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants : A(2 ; −1 ; 0), B(3 ; −1 ; 2), C(0 ; 4 ; 1) et S(0 ; 1 ; 4).

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

c. Montrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

3. Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S. Elle coupe le plan (ABC) en H.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).

b. Montrer que les coordonnées du point H sont H(2 ; 2 ; 3).

4. On rappelle que le volume V d'un tetraèdre est $V = \dfrac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.
Calculer le volume du tétraèdre SABC.

5. **a.** Calculer la longueur SA.

b. On indique que SB $= \sqrt{17}$.
En déduire une mesure de l'angle $\widehat{\text{ASB}}$ approchée au dixième de degré.

2.4 Suites : 5 points

Autre exercice possible : exercice II) de Amérique du Nord, mai 2021

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x - \ln(x-1)$.

On considère la suite (u_n) de terme initial $u_0 = 10$ et telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

Partie I :

La feuille de calcul ci-contre a permis d'obtenir des valeurs approchées des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	10
3	1	7,80277542
4	2	5,88544474
5	3	4,29918442
6	4	3,10550913
7	5	2,36095182
8	6	2,0527675
9	7	2,00134509
10	8	2,0000009

1. Quelle formule a été saisie dans la cellule B3 pour permettre le calcul des valeurs approchées de (u_n) par recopie vers le bas ?

2. À l'aide de ces valeurs, conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

Partie II :

On rappelle que la fonction f est définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln(x-1).$$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$. On admettra que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. **a.** Soit f' la fonction dérivée de f. Montrer que pour tout $x \in]1\ ;\ +\infty[,\ f'(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$.

b. En déduire le tableau des variations de f sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$, complété par les limites.

c. Justifier que pour tout $x \geqslant 2,\ f(x) \geqslant 2$.

Partie III :

1. En utilisant les résultats de la partie II, démontrer par récurrence que $u_n \geqslant 2$ pour tout entier naturel n.

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

4. On admet que ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$. Donner la valeur de ℓ.

Remarque : dans ce dernier exercice de suite, deux résultats sont admis. Il faudrait cependant savoir démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ *et savoir sans que cela ne soit rappelé que* $f(\ell) = \ell$.

3 Entraînement baccalauréat : piste rouge

3.1 Fonctions : 5 points

Partie I

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $h(x) = 1 + \dfrac{\ln(x)}{x}$.

1. Déterminer la limite de la fonction h en 0.
2. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.
3. On note h' la fonction dérivée de h. Démontrer que, pour tout nombre réel x de $]0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$h'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

4. Dresser le tableau de variations de la fonction h sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
5. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0\ ;\ +\infty[$.
   Justifier que l'on a : $0,5 < \alpha < 0,6$.

Partie II

Dans cette partie, on considère les fonctions f et g définies sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

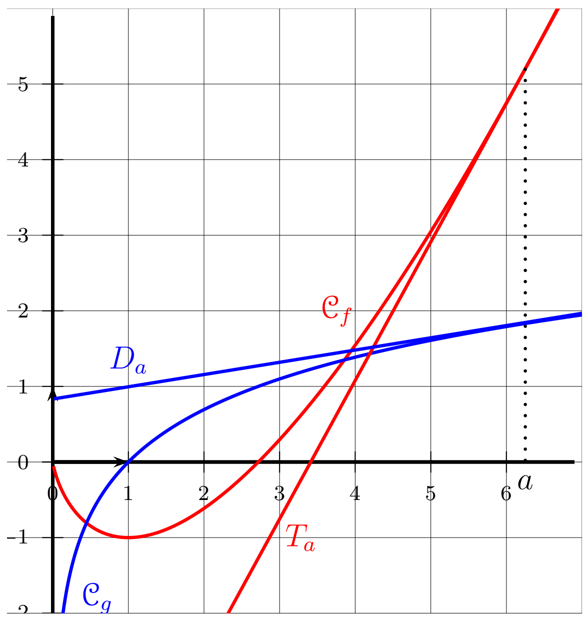
$$f(x) = x\ln(x) - x; \qquad g(x) = \ln(x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentant respectivement les fonctions f et g dans un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Pour tout nombre réel a strictement positif, on appelle :

- T_a la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse a ;
- D_a la tangente à $\mathcal{C}_g$ en son point d'abscisse a.

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ainsi que deux tangentes T_a et D_a sont représentées ci-dessous.



On recherche d'éventuelles valeurs de a pour lesquelles les droites T_a et D_a sont perpendiculaires.

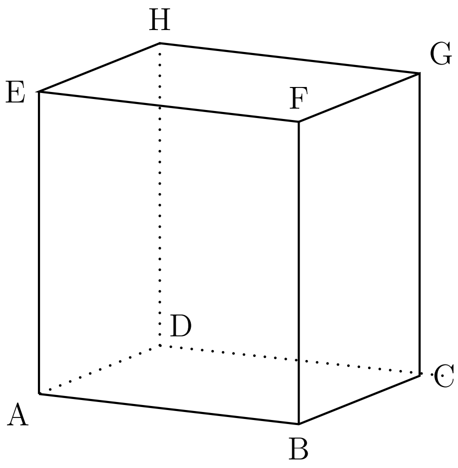
Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

1. Justifier que la droite D_a a pour coefficient directeur $\dfrac{1}{a}$.
2. Justifier que la droite T_a a pour coefficient directeur $\ln(a)$.
   On rappelle que dans un repère orthonormé, deux droites de coefficients directeurs respectifs m et m'sont perpendiculaires si et seulement si $mm' = -1$.
3. Démontrer qu'il existe une unique valeur de a, que l'on identifiera, pour laquelle les droites T_a et D_a sont perpendiculaires.

3.2 Espace : 5 points

Le but de cet exercice est d'examiner, dans différents cas, si les hauteurs d'un tétraèdre sont concourantes, c'est-à-dire d'étudier l'existence d'un point d'intersection de ses quatre hauteurs.

On rappelle que dans un tétraèdre MNPQ, *la hauteur issue de* M *est la droite passant par* M *orthogonale au plan* (NPQ).



Partie A : Étude de cas particuliers

On considère un cube ABCDEFGH.

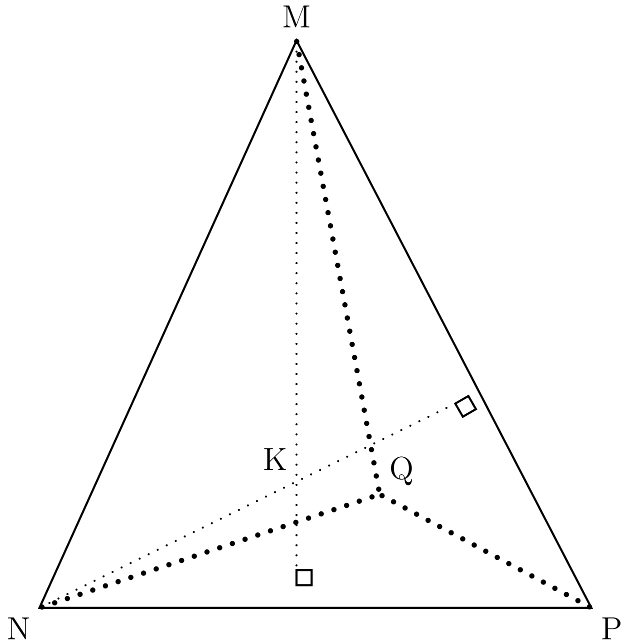
On admet que les droites (AG), (BH), (CE) et (DF), appelées « grandes diagonales » du cube, sont concourantes.

1. On considère le tétraèdre ABCE.
   a. Préciser la hauteur issue de E et la hauteur issue de C dans ce tétraèdre.
   b. Les quatre hauteurs du tétraèdre ABCE sont-elles concourantes ?
2. On considère le tétraèdre ACHF et on travaille dans le repère $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
   a. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ACH) est : $x - y + z = 0$.
   b. En déduire que (FD) est la hauteur issue de F du tétraèdre ACHF.
   c. Par analogie avec le résultat précédent, préciser les hauteurs du tétraèdre ACHF issues respectivement des sommets A, C et H.
   Les quatre hauteurs du tétraèdre ACHF sont-elles concourantes ?

Dans la suite de cet exercice, un tétraèdre dont les quatre hauteurs sont concourantes sera appelé un tétraèdre orthocentrique.

Partie B Une propriété des tétraèdres orthocentriques

Dans cette partie, on considère un tétraèdre MNPQ dont les hauteurs issues des sommets M et N sont sécantes en un point K. Les droites (MK) et (NK) sont donc orthogonales aux plans (NPQ) et (MPQ) respectivement.



1. **a.** Justifier que la droite (PQ) est orthogonale à la droite (MK) ; on admet de même que les droites (PQ) et (NK) sont orthogonales.
   b. Que peut-on déduire de la question précédente relativement à la droite (PQ) et au plan (MNK) ? Justifier la réponse.
2. Montrer que les arêtes [MN] et [PQ] sont orthogonales.
   Ainsi, on obtient la propriété suivante :
   Si un tétraèdre est orthocentrique, alors ses arêtes opposées sont orthogonales deux à deux.
   (On dit que deux arêtes d'un tétraèdre sont « opposées » lorsqu'elles n'ont pas de sommet commun.)

Partie C : Application

Dans un repère orthonormé, on considère les points : $\mathrm{R}(-3\,;\,5\,;\,2), \mathrm{S}(1\,;\,4\,;\,-2), \mathrm{T}(4\,;\,-1\,;\,5)$ et $\mathrm{U}(4\,;\,7\,;\,3)$. Le tétraèdre RSTU est-il orthocentrique ? Justifier.

3.3 Probabilités : 5 points

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville.

La vaccination contre la grippe est possible ; elle doit être renouvelée chaque année.

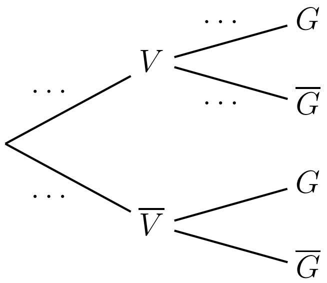
Partie A

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné. Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

- 40 % de la population est vaccinée ;
- 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
- 20 % de la population a contracté la grippe.

On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les évènements : V : « la personne est vaccinée contre la grippe » et G : « la personne a contracté la grippe ».

1. **a.** Reproduire l'arbre pondéré ci-contre et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches.



2. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait la grippe et soit vaccinée.
3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à $0,28$.

Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à 10^{-3} près.

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville. Après la période hivernale, on interroge au hasard n habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à n tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à $0,4$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?
2. Dans cette question, on suppose que $n = 40$.
   - **a.** Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.
   - **b.** Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.
   - **c.** *Question ajoutée.* Déterminer un intervalle centré en la moyenne contenant au moins 95% des données.

3.4 Suites : 5 points

Autre exercice possible : exercice III) du suejt de métropole du 8 juin 2021 (sujet 2)

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.

Elle propose alors à ses 5000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.

En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.

Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85 % de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.

On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n).

Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n-ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A :

1. Calculer a_1.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3000$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,85$.
   b. Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000$.
4. Déterminer le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

Partie B :

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 4}{u_n + 2}$, où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.
   b. Justifier que la suite (u_n) est convergente.
3. On admet que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

   En déduire la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.

Remarque : il faut savoir montrer que $0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

4 Entraînement baccalauréat : piste noire

4.1 Fonctions : 5 points

Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = \ln(x) + 2x - 2$.

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et 0.

2. Déterminer le sens de variation de la fonction g sur $]0\ ;\ +\infty[$.

3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\ ;\ +\infty[$.

4. Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de g sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie II : Étude d'une fonction f

On considère la fonction f, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \left(2 - \dfrac{1}{x}\right)\ln(x) - 1)$.

1. **a.** On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa dérivée.

Démontrer que, pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$. Le calcul des limites n'est pas demandé.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ puis dresser le tableau de signes de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie III : Étude d'une fonction F admettant pour dérivée la fonction f

Soit F une primitive de f. On note $\mathcal{C}_F$ la courbe représentative de la fonction F dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On ne cherchera pas à déterminer une expression de $F(x)$.

1. Étudier les variations de F sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2. La courbe $\mathcal{C}_F$ représentative de F admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ? Justifier la réponse.

4.2 Probabilités : 5 points

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de $0,1$;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,8$;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,6$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'évènement « le joueur gagne la n-ième partie » ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n. On a donc $p_1 = 0,1$.

1. Montrer que $p_2 = 0,62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.

3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.

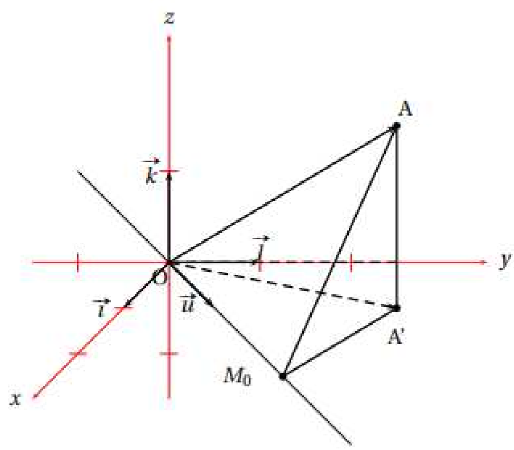
4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{3}{5}$.

5. *Question ajoutée* : écrire une fonction de programmation permettant de calculer p_N, où N sera un paramètre de la fonction.
6. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.
7. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.
8. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on : $\dfrac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$?
9. *Question ajoutée* : écrire une fonction de programmation permettant de déterminer le premier rang N tel que $\dfrac{3}{4} - p_n < E$, où E sera un paramètre de la fonction.
10. *Question ajoutée* : une joueuse experte gagne une partie avec une probabilité de $0,89$.
Elle joue 42 parties consécutives et on suppose que toutes les parties sont indépendantes les unes des autres.
Déterminer un intervalle $[a\ ;\ b]$ le plus petit possible telle que la probabilité qu'elle ait entre a victoires et b victoires soit supérieure ou égal à $0,95$.

4.3 Espace : 5 points

Dans un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ on considère

- le point A de coordonnées $(1\,;\,3\,;\,2)$,
- le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$
- la droite d passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}$.



Le but de cet exercice est de déterminer le point de d le plus proche du point A et d'étudier quelques propriétés de ce point.
On pourra s'appuyer sur la figure ci-contre pour raisonner au fur et à mesure des questions.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
2. Soit t un nombre réel quelconque, et M un point de la droite d, le point M ayant pour coordonnées $(t\ ;\ t\ ;\ 0)$.
   a. On note AM la distance entre les points A et M. Démontrer que : $AM^2 = 2t^2 - 8t + 14$.
   b. Démontrer que le point M_0 de coordonnées $(2\ ;\ 2\ ;\ 0)$ est le point de la droite d pour lequel la distance AM est minimale.
   On admettra que la distance AM est minimale lorsque son carré AM^2 est minimal.
3. Démontrer que les droites (AM_0) et d sont orthogonales.
4. On appelle A' le projeté orthogonal du point A sur le plan d'équation cartésienne $z = 0$.
   a. Déterminer les coordonnées de A'.
   b. Démontrer que le point M_0 est le point du plan $(AA'M_0)$ le plus proche du point O.
5. Calculer le volume de la pyramide $OM_0A'A$.

4.4 Suites : 6 points

Autre sujet possible : Métropole, exercice II), Epreuve 2, 15/03/2021.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = 16 \quad ; \quad v_0 = 5$ et pour tout entier naturel n :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \\ v_{n+1} & = & \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{array}\right.$$

1. Calculer u_1 et v_1.

2. *Question ajoutée.* Proposer une fonction de programmation en langage Python permettant de calculer u_N et v_N, où N est un paramètre de la fonction.

3. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = u_n - v_n$.

a. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 0,1.
En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de w_n en fonction de n.

b. Préciser la limite de (w_n).

4. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = -0,4w_n$.

b. En déduire que les variations de la suite (u_n).

c. *Question ajoutée.* Démontrer par un raisonnement analogue que (v_n) est croissante. En déduire pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant 5$.

d. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 5$.
En déduire que la suite (u_n) est convergente. On appelle ℓ la limite de (u_n).

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est convergente. On admet ce résultat, et on appelle ℓ' la limite de (v_n).

5. a. Démontrer que $\ell = \ell'$.

b. On considère la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par : $c_n = 5u_n + 4v_n$.
Démontrer que la suite (c_n) est constante et préciser sa valeur.

c. Déterminer la valeur commune des limites ℓ et ℓ'.

---

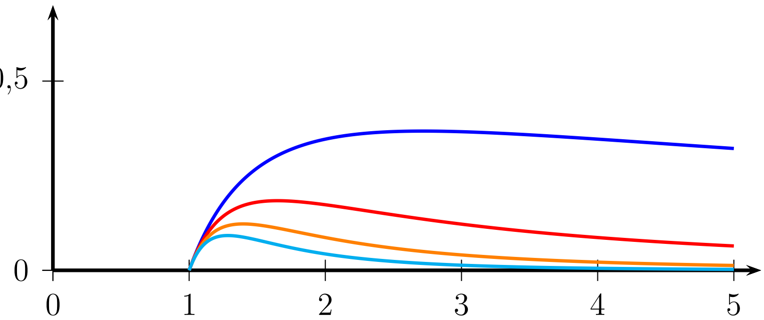
5 Entraînement baccalauréat : hors-piste

5.1 Fonctions : 5 points

On considère, pour tout entier $n > 0$, les fonctions f_n définies sur l'intervalle [1 ; 5J par : $f_n(x) = \dfrac{\ln x}{x^n}$.

Pour tout entier $n > 0$, on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes $\mathcal{C}_n$ pour n appartenant à $\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.



1. Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle $[1 ; 5]$: $f_n'(x) = \dfrac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}$.

2. a. Démontrer que pour tout entier $n > 0$, on admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle $[1 ; 5]$.

b. On note A_n le point de la courbe $\mathcal{C}_n$ ayant pour ordonnée ce maximum. Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \ln(x)$.

3. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$. On note $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$. Si f est positive sur cet intervalle, cela correspond à l'aire du domaine situé sous la courbe de f, au-dessus de l'axe des abscisses et entre les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. En particulier, si g est fonction continue sur $[a\ ;\ b]$ telle que, pour tout $x \in [a\ ;\ b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Soit F une primitive de f. On admet que $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - f(a)$.

a. Montrer que, pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,5]$: $0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \dfrac{\ln(5)}{x^n}$.

b. Montrer que pour tout entier $n > 1$: $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)$.

c. Pour tout entier $n > 0$, on s'intéresse à l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface sous la courbe f_n, c'est-à-dire l'aire du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$ et la courbe $\mathcal{C}_n$.
Déterminer la valeur limite de cette aire quand n tend vers $+\infty$.

5.2 Probabilités : 4 points

Sur un court de tennis, un lance-balle permet à un joueur de s'entraîner seul. Cet appareil envoie des balles une par une à une cadence régulière. Le joueur frappe alors la balle puis la balle suivante arrive. Suivant le manuel du constructeur, le lance-balle envoie au hasard la balle à droite ou à gauche avec la même probabilité. *Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à* 10^{-3} *près.*

Partie A

Le joueur s'apprête à recevoir une série de 20 balles.

1. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie 10 balles à droite ?

2. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie entre 5 et 10 balles à droite ?

Partie B

Le lance-balle est équipé d'un réservoir pouvant contenir 100 balles. Sur une séquence de 100 lancers, 42 balles ont été lancées à droite.

Le joueur doute alors du bon fonctionnement de l'appareil. Ses doutes sont-ils justifiés ?

Partie C

Pour augmenter la difficulté le joueur paramètre le lance-balle de façon à donner un effet aux balles lancées. Elles peuvent être soit « liftées » soit « coupées ». La probabilité que le lance-balle envoie une balle à droite est toujours égale à la probabilité que le lance-balle envoie une balle à gauche.

Les réglages de l'appareil permettent d'affirmer que :

- la probabilité que le lance-balle envoie une balle liftée à droite est $0,24$;
- la probabilité que le lance-balle envoie une balle coupée à gauche est $0,235$.

Si le lance-balle envoie une balle coupée, quelle est la probabilité qu'elle soit envoyée à droite ?

Indication pour la partie B : déterminer un intervalle $[a\ ;\ b]$ *centré en la moyenne contenant au moins* 95% *des données.*

5.3 Espace : 6 points

Autre exercice possible : exercice 3, Liban, mai 2018

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Dans un plan P, on considère un triangle ABC rectangle en A.

Soit d la droite orthogonale au plan P et passant par le point B. On considère un point D de cette droite distinct du point B.

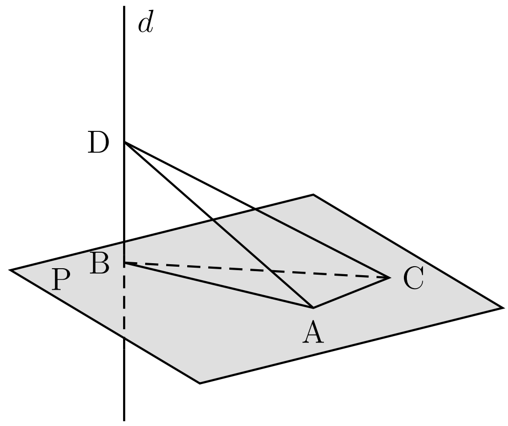
1. Montrer que la droite (AC) est orthogonale au plan (BAD).

On appelle *bicoin* un tétraèdre dont les quatre faces sont des triangles rectangles.

2. Montrer que le tétraèdre ABCD est un bicoin.

3. **a.** Justifier que l'arête [CD] est la plus longue arête du bicoin ABCD.

b. On note I le milieu de l'arête [CD]. Montrer que le point I est équidistant des 4 sommets du bicoin ABCD.



Partie B

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le point A(3 ; 1 ; −5) et la droite d de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 2t+1 \\ y & = & -2t+9 \\ z & = & t-3 \end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan P orthogonal à la droite d et passant par le point A.

2. Montrer que le point d'intersection du plan P et de la droite d est le point B(5 ; 5 ; −1),

3. Justifier que le point C(7 ; 3 ; −9) appartient au plan P puis montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

4. Soit t un réel différent de 2 et M le point de paramètre t appartenant à la droite d.

a. Justifier que le triangle ABM est rectangle.

b. Montrer que le triangle ABM est isocèle en B si et seulement si le réel t vérifie l'équation $t^2 - 4t = 0$.

c. En déduire les coordonnées des points M_1 et M_2 de la droite d tels que les triangles rectangles ABM_1 et ABM_2 soient isocèles en B.

Partie C

On donne le point D(9 ; 1 ; 1) qui est un des deux points solutions de la question **4. c.** de la partie B. Les quatre sommets du tétraèdre ABCD sont situés sur une sphère.

En utilisant les résultats des questions des parties A et B précédentes, déterminer les coordonnées du centre de cette sphère et calculer son rayon.

5.4 Suites : 5 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;u\,;v)$.

Pour tout entier $n \geqslant 4$, on considère P_n un polygone régulier à n côtés, de centre O et dont l'aire est égale à 1. On admet qu'un tel polygone est constitué de n triangles superposables à un triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$ donné, isocèle en O.

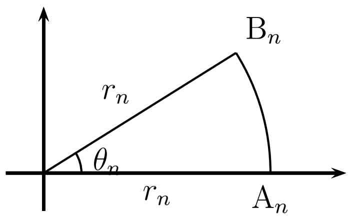
On note $r_n = \mathrm{OA}_n$ la distance entre le centre O et le sommet A_n d'un tel polygone.

Partie A– étude du cas particulier $n = 6$

1. Justifier le fait que le triangle $\mathrm{OA}_6\mathrm{B}_6$ est équilatéral, et que son aire est égale à $\dfrac{1}{6}$.
2. Exprimer en fonction de r_6 la hauteur du triangle $\mathrm{OA}_6\mathrm{B}_6$ issue du sommet B_6.
3. En déduire que $r_6 = \sqrt{\dfrac{2}{3\sqrt{3}}}$.

Partie B– cas général avec $n \geqslant 4$

Dans cette partie, on considère le polygone P_n avec $n \geqslant 4$, construit de telle sorte que le point A_n soit situé sur l'axe réel, et ait pour affixe r_n.
L'affixe de B_n a pour module r_n et pour argument θ_n, où θ_n est un réel de l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.



1. Exprimer en fonction de r_n et θ_n la hauteur issue de B_n dans le triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$ puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\dfrac{r_n^2}{2}\sin(\theta_n)$.
2. On rappelle que l'aire du polygone P_n est égale à 1.
   Donner, en fonction de n, une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}_n},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}_n}\right)$, puis démontrer que :
   $$r_n = \sqrt{\dfrac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}}$$

Partie C– étude de la suite (r_n)

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$ par : $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$.

On admet que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$.

1. *(Question ajoutée).* Justifier que le nombre r_n, défini dans la partie B pour $n \geqslant 4$, s'exprime à l'aide de la fonction f par : $\boxed{r_n = \sqrt{\dfrac{1}{\pi}f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}}$
2. Montrer que la suite (r_n) est décroissante. On pourra pour cela commencer par démontrer que pour tout $n \geqslant 4$, on a : $0 < \dfrac{2\pi}{n+1} < \dfrac{2\pi}{n} < \pi$.
3. En déduire que la suite (r_n) converge.
4. *Question ajoutée.* On admet dans la suite de l'exercice que la limite L de (r_n) est $L = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.
   En déduire la limite de f quand x tend vers 0.
5. Écrire une fonction de programmation permettant de déterminer le premier rang n tel que $r_n \leqslant 0,58$.

---

labo-maths.janot@ac-dijon.fr