Éléments de mathématiques post-bac

Vanwalleghem Olivier - olivier.vanwalleghem@ac-dijon.fr

Dernière mise à jour : 22 octobre 2021 − Version 1.2

Introduction

Le présent "ouvrage" (quel grand mot) n'a pas pour but en soi de résumer l'intégralité (ou même une partie) de la L1 en mathématiques. Il n'a pour but que de présenter au lecteur curieux de terminale scientifique des notions importantes que l'on découvre en première année post-bac.

Ces quelques pages sont donc en particulier destinées :

- aux futurs élèves de licence mathématiques ;
- aux futurs élèves de classe préparatoire aux grandes écoles (CPGE) scientifiques (MPSI, PCSI, PTSI, BL, BCPST...).

Cela dit, elles pourront également intéresser des élèves des premières années citées précédemment, ainsi que des collègues de mathématiques souhaitant refaire pour le plaisir quelques mathématiques post-bac.

J'ai globalement basé mon propos sur l'actuel programme de MPSI. Cependant, ayant été sollicité par certains anciens élèves de terminale ayant intégré des CPGE BL et des licences économiques, j'ai souvent approché certains chapitres de manière plus superficielle que ce que l'on pourrait trouver en MPSI.

Encore une fois, le but de l'ouvrage n'est certainement pas de faire un cours de MPSI.

Juste de donner un vague aperçu lointain de ce qui peut être fait après.

Concernant les différents chapitres, la plupart ont été mis entre les mains d'élèves de TS volontaires (lors de séances d'approfondissement) (sauf polynômes, équations différentielles et espace vectoriel de dimension finie). Faute de temps, ils ont été abordés de manière sommaire et il m'est difficile de faire un retour pertinent. Cependant, globalement, en dehors des exercices, ces feuilles ont été abordées correctement.

Concernant la structure des chapitres, j'ai volontairement mis l'ensemble des démonstrations réalisables en exercices. Pourquoi ? Simplement parce qu'en post-bac, il est essentiel de savoir faire ces démonstrations, qui contienne en elle l'essence même des mathématiques. C'est donc un excellent entraînement que de les chercher !

Enfin, il serait malhonnête de ma part de prétendre qu'il s'agit d'une création personnelle. Beaucoup d'exemples et d'exercices ont été repris à partir de mes propres cours de MPSI (voire de TS !), qui eux-même ont sans nul doute été inspirés de nombreux ouvrages.

Élève/étudiant qui consulte ces chapitres, n'hésite pas à me contacter sur l'adresse mail ci-dessus pour avoir des éclaircissements, pour m'indiquer quelles ont été tes difficultés. Cela me permettra de réadapter les exercices.

Au professeur qui jetterait un regard distrait sur cet ensemble, je vous remercie par avance de me signaler si vous reprenez certaines parties pour les donner à vos élèves. Du temps et de la sueur furent nécessaires à sa conception et j'apprécierai de savoir quel usage il en est fait. :-)

A tous, lectrices, lecteurs, je vous remercie par avance de m'indiquer (et de m'excuser pour) les innombrables coquilles (la relecture étant pour l'instant assez partielle) sans nul doute présentes.

Sur ce, bonne lecture !

Mathématiquement vôtre,
Olivier Vanwalleghem [1]

Mise à jour 0.8904 en juillet 2018 : correction de nombreuses coquilles ; amélioration de la mise en page en faisant ressortir les exercices (en maths, ce sont les exercices les plus importants puisqu'ils permettent de comprendre) ; ajouts de quelques exercices et modifications d'autres.

Mise à jour 0.8928 en avril 2020 : en cliquant sur un titre dans le sommaire, on accède à la page correspondante. Corrections de quelques exercices.

Mise à jour 0.892804 en avril 2020 : correction intégrale des exercices jusqu'au chapitre 6 inclus (sauf 5.16) ; ajout de nombreuses précisions dans les chapitres 5 à 8 ; ajout de la partie 3.7.2 sur l'injectivité et la surjectivité ; ajout de ma date d'anniversaire en Easter Egg (c'est de saison, après tout).

Mise à jour 1.0 en mai 2020 : correction des exercices des chapitres 7 et 8.

Ajout version 1.1, mai 2020 : chapitre "Initiation au dénombrement" (en position de chapitre 4), avec les corrigés des exercices. Correction quelques coquilles dans les corrigés.

1. Enseignant de mathématiques au lycée Catherine et Raymond Janot de Sens (89) (depuis 09/2014). Création du présent ouvrage en 2017, après deux ans d'enseignement en terminales S (et autres classes, bien sûr !), classes ô combien stimulantes et sympathiques !

Table des matières

1 Quelques éléments de logique **6**
1.1 Un exemple célèbre pour commencer . . . 6
1.2 Implication & Co . . . 6
1.3 Quantificateurs . . . 7
1.4 Ou et/ou et . . . 7
1.5 Négation . . . 8
1.6 Trois raisonnements spécifiques : absurde, contraposée et inclusion d'ensemble . . . 8

2 Quelques structures algébriques usuelles **10**
2.1 Un exemple d'introduction . . . 10
2.2 Groupe et sous-groupe . . . 10
2.2.1 Notion de groupe . . . 10
2.2.2 Notion de sous-groupe . . . 11
2.3 Notion d'anneau et de corps . . . 12
2.4 Exercices . . . 13

3 Suites usuelles **15**
3.1 Rappel sur les suites arithmétiques et géométriques . . . 15
3.2 Suites arithmético-géométriques . . . 15
3.3 Suites vérifiant une relation du type $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ . . . 15

4 Quelques fonctions usuelles, telles qu'enseignées en post-bac **16**
4.1 Un exemple d'introduction pour le vocabulaire de base . . . 16
4.2 P'tits théorèmes, et après, c'est parti ! . . . 17
4.3 La fonction Logarithme Népérien . . . 17
4.4 La fonction exponentielle . . . 18
4.5 Fonctions puissances . . . 19
4.6 Fonctions hyperboliques . . . 20
4.6.1 Deux mots sur les fonctions sinus et cosinus . . . 20
4.7 Exercices . . . 20
4.7.1 Sur les fonctions de référence . . . 20
4.7.2 Sur les notions d'injectivité, de surjectivité et de composition de fonctions ▲. . . . 21

5 Initiation au dénombrement **24**
5.1 Cardinal et listes . . . 24
5.2 Arrangements . . . 25
5.3 Permutations . . . 26
5.4 Combinaisons et coefficient binomial . . . 27
5.5 Lien avec les probabilités . . . 28
5.5.1 Calculs "simples" . . . 28
5.5.2 Loi binomiale . . . 29
5.5.3 Loi hypergéométrique . . . 29
5.6 Exercices . . . 30

6 Quelques calculs d'intégrales atypiques **33**
6.1 Formule de l'intégration par parties et applications . . . 33
6.2 Calcul intégral et volume . . . 35
6.3 Intégration par changement de variable . . . 38

7 Équations différentielles d'ordre 1 **40**
7.1 Mise en bouche . . . 40
7.1.1 Le circuit RC . . . 40
7.1.2 Une première équation différentielle . . . 41
7.2 Résolution de l'équation homogène, aussi appelée équation sans second membre, $y' = ay$ . . . 41
7.3 Résolution de l'équation linéaire d'ordre 1 à coefficients constants $y' = ay + b$ . . . 42
7.4 Exercices . . . 43
7.5 Un mot sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2 . . . 45

8 Espace vectoriel **48**
8.1 Un exemple d'introduction . . . 48
8.2 K-espace vectoriel . . . 48
8.3 Sous-espace vectoriel . . . 49
8.4 Application linéaire . . . 50
8.4.1 Endo, iso and co . . . 50
8.4.2 Noyau et image . . . 51
8.5 Sommes des sev . . . 52
8.6 Exercices . . . 53

9 Polynômes **55**
9.1 Exemple d'introduction . . . 55
9.2 Degré d'un polynôme . . . 55
9.3 Division euclidienne . . . 56
9.4 Racines d'un polynôme . . . 57
9.5 Décomposition sur $\mathbf{R}$ et sur $\mathbf{C}$ . . . 59
9.5.1 Sur $\mathbf{C}$ . . . 59
9.5.2 Sur $\mathbf{R}$ . . . 59
9.6 Exercices . . . 59

10 Espace vectoriel en dimension finie **61**
10.1 Introduction géométrique . . . 61
10.2 Base . . . 61
10.3 Notion de dimension finie . . . 63
10.4 Dimension et application : une série de théorèmes (très) utiles . . . 63
10.5 Rang d'une application linéaire . . . 64
10.6 Exercices . . . 65

11 Élements de correction des exercices **67**
11.1 Quelques éléments de logique . . . 67
11.2 Quelques structures algébriques . . . 69
11.2.1 Partie cours . . . 69
11.2.2 Partie exercices . . . 71
11.3 Suites usuelles . . . 72
11.3.1 Rappel sur les suites arithmétiques et géométriques . . . 72
11.3.2 Suites arithmético-géométriques . . . 72
11.3.3 Suites vérifiant une relation du type $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ . . . 72
11.4 Quelques fonctions usuelles... . . . 72
11.4.1 Sur les fonctions de référence . . . 72
11.4.2 Sur les notions d'injectivité et de surjectivité . . . 75
11.5 Initiation au dénombrement . . . 76
11.5.1 Partie cours . . . 76
11.5.2 Partie Exercices . . . 78

11.6 Quelques calculs d'intégrales atypiques 80
11.7 Équations différentielles d'ordre 1 83
11.7.1 Partie cours 83
11.7.2 Partie exercices 84
11.8 Espace vectoriel 86
11.8.1 Partie cours 86
11.8.2 Partie Exercices 89
11.9 Polynômes 92
11.9.1 Partie cours 92
11.9.2 Partie exercices 94
11.10 Espace vectoriel de dimension finie 96
11.10.1 Partie cours 96
11.10.2 Partie exercices 98

12 Notations usuelles et prérequis 101
12.1 Notations usuelles 101
12.2 Prérequis 102
12.3 Bibliographie/sitographie 103

Chapitre 1

Quelques éléments de logique

1.1 Un exemple célèbre pour commencer

Exercice 1.1

Si quelqu'un vous dit la phrase suivante, dit-il la vérité ?

"Je mens !"

[1]

Remarque 1.1

Il s'agit d'un paradoxe célèbre, appelé paradoxe du menteur. Un autre paradoxe célèbre est celui du barbier dans son village. Le lecteur intéressé pourra notamment chercher le nom de Bertrand Russel, éminent mathématicien du début du 20ème siècle.

1.2 Implication & Co

Définition 1.2

Une proposition désigne une phrase qui est soit vraie, soit fausse. On les notera (P) ou (Q).

Exercice 1.2

(P) : "ABCD est un carré" ; (Q) "ABCD est un parallélogramme."

1. **L'implication** $(P) \Rightarrow (Q)$ est-elle vraie ?
2. Si oui, **la réciproque** $(P) \Leftarrow (Q)$ est-elle vraie ?

[2]

Remarque 1.3

Une réciproque peut toujours être énoncée, mais elle n'est pas toujours vraie !

Exercice 1.3

Pour chacun des énoncés suivants, donnez l'énoncé réciproque et dites si cet énoncé est vrai ou faux.

1. Si un triangle ABC est inscrit dans un cercle de diamètre [BC], alors ce triangle est rectangle en A.
2. Si un triangle a une médiane qui est aussi hauteur, alors ce triangle est isocèle.
3. Si un quadrilatère est un rectangle, alors ses diagonales ont même longueur.

Définition 1.4

Quand l'implication et la réciproque sont vraies toutes les deux, on parle d'**équivalence**. On note cela : $(P) \Leftrightarrow (Q)$. Cela se lit "(P) est équivalent à (Q)" ou "(P) si et seulement si (Q)".

Exemple 1.5

ABC est un triangle rectangle en A $\Leftrightarrow$ ABC est un triangle inscrit dans un cercle de diamètre [BC].

Exercice 1.4

Soit $z \in \mathbf{C}$. Montrer que $z^2 < 0$ si et seulement si z est un imaginaire pur.

1. Les éventuels corrigés sont en fin d'ouvrage (voir sommaire).
2. $(P) \Rightarrow (Q)$ se lit "(P) implique (Q)". À titre d'information, les notations sont synthétisées en fin d'ouvrage.

1.3 Quantificateurs

Exercice 1.5 **Pour commencer...**

Que peut-on dire des deux égalités suivantes :

$$\begin{cases} (x+1)^2 & = & x^2+2x+1 \\ (x+1)^2 & = & x^2+1 \end{cases} ?$$

Notations 1.6

$\forall$: quantificateur universel (se lit "Pour tout").

$\exists$: quantificateur existentiel (se lit "Il existe").

Exercice 1.6 **À Relier**

Reliez chaque phrase 1, 2 et 3 à sa signification A, B et C.

(1) g est la fonction définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ par $g(x) = 3x^2 + 1$.
(2) Est-ce que l'équation $g(x) = 3x^2+1$ admet des solutions ?
(3) Résolvez l'équation $g(x) = x$.

(A) Existe-t-il des nombres x pour lesquels $g(x)$ et $3x^2 + 1$ sont égaux ?
(B) Pour tout nombre x, l'image de x par la fonction g est $3x^2 + 1$.
(C) Déterminez l'ensemble des nombres tels que $g(x)$ et x soient égaux.

Exercice 1.7 **"Il existe" ou "Pour tout" ?**

On considère deux points distincts A et B. Compléter quand cela est possible les phrases suivantes avec un quantificateur, c'est à dire soit avec "Il existe" soit avec "Pour tout".

1. ..... point M : $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$.
2. ..... point M : $AM + MB = AB$.
3. ..... point M : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.
4. ..... point M : $AM + MB \geqslant AB$.
5. ..... point M : $AM = MB$.
6. ..... point M : $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$.

1.4 Ou et/ou et

Exercice 1.8 **Vrai ou faux ?**

Compléter le tableau suivant en indiquant si cela est vrai ou si cela est faux.

x	$x^2 > 1$	$x < 0$	$x^2 > 1$ et $x < 0$	$x^2 > 1$ ou $x < 0$
-5				
$\sqrt{3}$				
$-0,8$				
$\frac{5}{6}$				

Remarque 1.7

Ce genre de table, appelée table booléenne (du nom de mathématicien Boole), est un classique pour les élèves connaissant les sciences de l'ingénieur.

1.5 Négation

Exercice 1.9 **Vu en 2nde**

1. On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Énoncez en français les événements contraires des événements :
   A : "Obtenir un trèfle" ; B : "Obtenir un roi ou une dame".
2. On tire une main de 5 cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes. Énoncez en français les événements contraires des événements (en utilisant des quantificateurs !) :
   C : "Obtenir au moins un as" ; D : " Toutes les cartes tirées sont des coeurs".

1.6 Trois raisonnements spécifiques : absurde, contraposée et inclusion d'ensemble

Démonstration par l'absurde

Exercice 1.10 **Démonstration par l'absurde**

Principe : On veut montrer que (P) implique (Q). On suppose alors que (non Q) est vraie et l'on aboutit à une contradiction (à un résultat absurde). Donc (P) implique (non Q) est faux. Donc (P) implique (Q) est vrai.
En effet, il est important de comprendre qu'en mathématiques, si un résultat est faux, c'est que son contraire est vrai. Tout le principe du raisonnement par l'absurde repose là-dessus.

Soit (P) la proposition : n^2 est pair. Soit (Q) la proposition : n est pair.
On rappelle qu'un nombre pair est un nombre pouvant s'écrire sous la forme $2k$, où k est un entier.

1. Montrer par l'absurde que : $(P) \Rightarrow (Q)$.
2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 1.11 **L'absurde prend de l'espace**

Montrer à l'aide d'un raisonnement par l'absurde le résultat suivant :

Si P et P' sont deux plans parallèles, alors tout plan Q coupant P coupe aussi P'.
De plus, leurs droites d'intersection $(d) = P \cap Q$ et $(d') = P \cap Q'$ sont parallèles.

On pourra utiliser sans justifier les résultats suivants :

- *Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.*
- *Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux.*

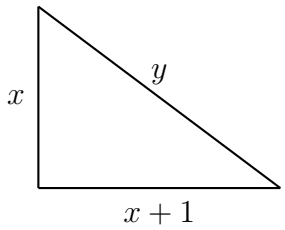
Exercice 1.12 **Une autre démonstration par l'absurde**

On veut montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel, c'est à dire qu'on ne peut pas trouver deux entiers p et q tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ et tels que la fraction $\dfrac{p}{q}$ soit irréductible.
Démontrer ce résultat à l'aide d'un raisonnement par l'absurde. [3]

3. *Pour vous aider, des astuces sont parfois indiquées. Nulle obligation des les suivre bien sûr ! Ici, quelle hypothèse faut-il faire sur le nombre $\sqrt{2}$? Que se passe-t-il alors si on l'élève au carré ? Que peut-on dire alors du nombre p ? Du nombre q ? Du coup, de la fraction ?*

Exercice 1.13 **D'après Métropole juin 2017 (série S)**

On appelle "triangle rectangle presque isocèle", en abrégé TRPI, un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs x et $x+1$, et dont l 'hypoténuse a pour longueur y, où x et y sont des entiers naturels.
Ainsi, un TRPI est un triangle rectangle dont les longueurs des côtés de l'angle droit sont deux nombres entiers consécutifs et dont la longueur de l'hypoténuse est un nombre entier.



Si le triangle de côtés x, $x+1$ et y, où y est la longueur de l'hypoténuse, est un TRPI, on dira que le couple $(x\ ;\ y)$ définit un TRPI.

1. Démontrer que le couple d'entiers naturels $(x\ ;\ y)$ définit un TRPI si, et seulement si, on a : $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$.
2. Montrer que le TRPI ayant les plus petits côtés non nuls est défini par le couple $(3\,;\,5)$.
3. (a) Soit n un entier naturel. Montrer que si n^2 est impair alors n est impair.
   (b) Montrer que dans un couple d'entiers $(x\ ;\ y)$ définissant un TRPI, le nombre y est nécessairement impair.
4. Montrer que si le couple d'entiers naturels $(x\ ;\ y)$ définit un TRPI, alors x et y sont premiers entre eux. [4]

Démonstration par contraposée

Exercice 1.14 **Un autre type de raisonnement, le raisonnement par contraposée**

Si $AB = 3$, $BC = 4$ et $AC = 6$, peut-on dire que le triangle ABC est rectangle ?
Remarque :
Montrer que $(P \Rightarrow Q)$ revient à montrer que (non $Q \Rightarrow$ non P) : c'est le principe de la démonstration par contraposée. En gros, comme disait Jean de La Fontaine : "si ce n'est toi, c'est donc ton frère !".

Exercice 1.15 **La contraposée, ce n'est pas absurde !**

Soit (P) la proposition : n^2 est pair. Soit (Q) la proposition : n est pair.
Montrer à l'aide d'un raisonnement par contraposée que $(P \Rightarrow Q)$.

Démontrer une inclusion d'ensembles

Soit A, B deux ensembles (de nombre, de fonctions...). Pour montrer que A est inclus dans B (ce qui se note : $A \subset B$), il faut montrer que tous les éléments de A appartiennent à B (ce qui se note : $\forall a \in A, a \in B$).
La rédaction sera toujours la même :

1. "Soit $a \in A$. Montrons que $a \in B$."
2. Calcul/raisonnement ingénieux.
3. "Mais ça alors ! $a \in B$".
4. "Ceci valant quelque soit $a \in A$, on en déduit que $A \subset B$."

À noter que si l'on parvient à montrer que $A \subset B$ et que $B \subset A$, alors $A = B$ (on procède souvent ainsi pour montrer une égalité d'ensemble).

Exercice 1.16 **Une première mise en oeuvre**

1. Soit $A = \{n \in \mathbf{N} : n^2 \text{ est pair}\}$ et soit B l'ensemble des entiers pairs.
   Montrer que $A \subset B$.
2. Soit $C = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto x^{2n}, n \in \mathbf{N}\}$. Montrer que C est inclus dans l'ensemble des fonctions paires de $\mathbf{R}$ de $\mathbf{R}$. [5]

4. Pour les non spécialistes, sachez que le théorème de Bezout (*"deux entiers naturels u et v sont premiers entre eux $\Leftrightarrow$ il existe deux entiers relatifs a et b tels que $au + bv = 1$"*) est très pratique à cet instant.
5. On rappelle que $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est paire si et seulement si : $\forall x \in \mathbf{R}, f(-x) = f(x)$

Chapitre 2

Quelques structures algébriques usuelles

2.1 Un exemple d'introduction

Compléter la table multiplicative suivante :

$\times$	-1	1
-1		
1		

On constate que l'on retombe toujours sur les mêmes valeurs que celle de départ. Ainsi, l'ensemble $(-1;1)$, muni de la multiplication (i.e. la seule opération autorisée est la multiplication), est un **groupe**.

À l'inverse, le même ensemble muni de l'addition n'en est pas un. En effet, compléter la table de somme suivante :

$+$	-1	1
-1		
1		

Que constate-t-on ?

2.2 Groupe et sous-groupe

2.2.1 Notion de groupe

Définition 2.1

Soit G un ensemble.

On munit cet ensemble d'une opération $\star$ (*loi interne de* G) de $G \times G$ dans G, qui attribue à chaque couple $(x;y)$ de G un unique élément de G, noté $x \star y$, de telle sorte que les 4 propriétés suivantes soient vérifiées :

1. si x, y sont des éléments de G, alors $x \star y$ est un élément de G ;
2. **Associativité de** $\star$: pour tous x, y, z de G, $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$;
3. **Élément neutre e** : il existe $e \in G$ tel que pour tout x de G, $e \star x = x \star e = x$.
4. **Élément symétrique** : pour tout x de G, il existe $x' \in G$ tel que : $x \star x' = x' \star x = e$.

On dit alors que $\boxed{(G, \star)}$ est un groupe.

Exemple 2.2

$(-1;1)$ muni de $\times$, c'est à dire $((-1;1), \times)$, est un groupe. En effet :

1. la propriété 1) est vérifiée à l'aide du tableau de l'introduction.
2. $(-1 \times 1) \times 1 = -1 \times 1 = -1 = -1 \times (1 \times 1)$. L'associativité est vérifiée sur cet exemple et se vérifie sans difficulté dans les autres cas (car la multiplication de nombres réels est associative).
3. $-1 \times \mathbf{1} = \mathbf{1} \times (-1) = -1$ et $1 \times \mathbf{1} = \mathbf{1} \times 1 = 1$. $\mathbf{1}$ est donc l'élément neutre de ce groupe.
4. $-1 \times (-1) = \mathbf{1}$: le symétrique de -1 est donc -1. De même, le symétrique de 1 est 1.

Remarques 2.3

- La troisième propriété implique qu'un groupe n'est jamais vide.
- Si pour tout élément x et y de G, $x \star y = y \star x$, alors le groupe est dit **commutatif** (ou **abélien**, du nom d'Abel).

Exercice 2.1 **Premières déterminations de groupe**

1. Montrer que l'ensemble des entiers relatifs $\mathbf{Z}$ muni de l'addition est un groupe commutatif, dont l'élément neutre est 0.
2. Montrer que l'ensemble $(-1; 1; -i; i)$ muni de la multiplication est un groupe commutatif. On pourra s'aider d'une table analogue à celles de l'introduction.
3. Montrer que l'ensemble des entiers naturels $\mathbf{N}$ muni de l'addition n'est pas un groupe.
4. L'ensemble $(0; 1)$ muni de la multiplication est-il un groupe ?
5. L'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$ muni de l'addition est-il un groupe ?
6. *Pour les spé maths uniquement, après avoir vu la notion d'inverse de matrice.* Justifier que l'ensemble des matrices carrés inversibles de dimension 2 à coefficients réels, muni de la multiplication, forme un groupe non commutatif.

[1]

Remarques 2.4

Certains groupes sont donc infinis, d'autres finis ; certains sont abéliens, d'autres non.

Par ailleurs, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ muni de l'addition sont des groupes (élément neutre : 0). De même, $\mathbf{Q} \setminus \{0\}$ (noté $\mathbf{Q}^\star$), $\mathbf{R}^\star$, $\mathbf{C}^\star$ muni de la multiplication sont aussi des groupes (élément neutre : 1).

Exercice 2.2 **Premières propriétés**

Soit $(G, \star)$ un groupe. Montrer que :

1. l'élément neutre e est unique.
2. le symétrique de tout élément de G est unique. On notera désormais $\boxed{x^{-1}}$ le symétrique de x.
3. ▲ $\forall (x, y) \in G^2, (x \star y)^{-1} = y^{-1} \star x^{-1}$.

[2]

2.2.2 Notion de sous-groupe

Définition 2.5

Soit $(G, \star)$ un groupe. Soit H une partie de G.

H est un **sous-groupe** de G lorsque H muni de la loi induite $\star$ restreinte sur H est un groupe.

Exemple 2.6

Posons $G = \{-1; 1; -i; i\}$ et $H = \{-1; 1\}$.

Alors $(G, \times)$ est un groupe (voir partie précédente), $H \subset G$ et $(H, \times)$ est un groupe (voir première partie - remarquons que l'opération est la même, à savoir la multiplication : c'est cela la loi induite $\star$).

Donc : H est un sous-groupe de G.

Exercice 2.3 **Premières propriétés**

1. Notons e l'élément neutre G et e' celui de H. En remarquant de $(e'^{-1} \star e') \star e' = e'^{-1} \star e'$ et en simplifiant des deux côtés de l'égalité, montrer que $e = e'$.
2. Montrer que les éléments symétriques de $h \in H$ sont égaux dans $(G, \star)$ et $(H, \star)$.

1. Astuce pour la question 3 : il suffit de montrer que l'une des 4 propriétés n'est pas vérifiée.
2. Astuce : pour démontrer l'unicité, supposer qu'il en existe deux. ▲ indique une question plus relevée.

Exercice 2.4 **Caractérisation des sous-groupes, théorème très important**

Le but de l'exercice est de démontrer la propriété suivante :
Soit $(G, \star)$ un groupe et H une partie de G. Alors :
(1) H est un sous-groupe de G ***si et seulement si***
(2) H est non vide et pour tout a, b de H, $a \star b \in H$ et $a^{-1} \in H$ ***si et seulement si***
(3) H est non vide et pour tout x, y de H, $x \star y^{-1} \in H$.
En résumé, il s'agit de montrer que $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3)$.
Pour cela, nous allons montrer que : $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.

1. Expliquer pourquoi montrer que "$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3)$" revient à montrer que "$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$".
2. Expliquer brièvement pourquoi : $(1) \Rightarrow (2)$.
3. Montrer que : $(2) \Rightarrow (3)$.
4. En revenant à la définition d'un groupe, montrer que : $(3) \Rightarrow (1)$ (*Astuce : commencer par montrer que $e \in H$*).

Remarque 2.7

Ainsi, pour montrer que H est un sous-groupe de G (et donc un groupe à part entière), il suffit de vérifier la propriété 3 ci-dessus et non les 4 critères définissant un groupe de la partie précédente. C'est de loin beaucoup plus rapide !

Exercice 2.5 **Quelques sous-groupes**

1. Soit $(G, \star)$ un groupe d'élément neutre e. En utilisant la troisième caractérisation des sous-groupes, montrer que $H = \{e\}$ est un sous-groupe de G.
   En fait, c'est même le plus petit sous-groupe que peut avoir G.
2. Montrer que $\mathbf{R}^\star$ est un sous groupe de $(\mathbf{C}^\star; \times)$.
3. Soit $a \in \mathbf{Z}$. On note $a\mathbf{Z}$ l'ensemble des entiers multiples de a, c'est à dire l'ensemble des $x \in \mathbf{Z}$ s'écrivant $x = ak$, où $k \in \mathbf{Z}$.
   Montrer que $a\mathbf{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbf{Z}; +)$.

2.3 Notion d'anneau et de corps

Définition 2.8

Soit $(A, +, \times)$ un ensemble muni de deux lois internes $+$ et $\times$. $(A, +, \times)$ est un anneau si :
1. $(A; +)$ est un groupe abélien ;
2. $\times$ est associative ;
3. il existe un élément neutre pour $\times$ (appelé **unité** de A) ;
4. $\times$ est distributive par rapport à $+$, i.e. pour tout $(x, y, z) \in A^3$, $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$ et $(x + y) \times z = x \times y + x \times z$.

Si de plus $\times$ est commutative, alors A est commutatif.

Notations usuelles 2.9

- 0_A est l'élément neutre pour $+$, $-a$ le symétrique de a pour $+$;
- 1_A est l'élément neutre pour $\times$, a^{-1} le symétrique de a pour $\times$;
- pour $n \in \mathbf{N}^\star$ et $a \in A$, $n.a = a + ... + a$ et $a^n = a \times ... \times a$.

Exercice 2.6 **Calcul dans un anneau**

Montrer que pour tout $(a, b, c) \in A^3$:

1. $a \times 0_A = 0_A \times a = 0_A$;
2. $a \times (-b) = (-a) \times b = -(a \times b)$ puis que $a \times (b - c) = a \times b - a \times c$.
3. si A est commutatif, alors $\forall n \in \mathbf{N}, (a \times b)^n = a^n \times b^n$.

[3]

3. Astuce pour la question 1 : $a \times 0_A = a \times (0_A + 0_A)$....

Exercice 2.7 **Groupe des inversibles d'un anneau**

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. $a \in A$ est dit inversible s'il admet un symétrique a^{-1} pour la loi $\times$. Montrer que l'ensemble des inversibles de A muni de la loi $\times$ est un groupe.

Exercice 2.8 **Quelques anneaux**

1. Montrer que $(\mathbf{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif.
2. (*Pour les spé maths*). Montrer que l'ensemble des matrices carrés de dimension 2, muni de la somme et du produit des matrices, est un anneau non commutatif.

Définition 2.10

Soit $(K, +, \times)$ un anneau (commutatif) tel que tout élément différent de 0_K soit inversible. Alors $(K, +, \times)$ est un **corps (commutatif).**

Exercice 2.9 **Exemple de corps**

1. Montrer que $(\mathbf{Q}, +, \times)$ est un corps (*il en serait de même pour* $\mathbf{R}$ *et* $\mathbf{C}$).
2. $(\mathbf{Z}, +, \times)$ est-il un corps ?

2.4 Exercices

Exercice 2.10

Soit $(G, \star)$ un groupe. On appelle centre de G l'ensemble
$Z = \{a \in G : \forall x \in G, a \star x = x \star a\}$ (i.e. l'ensemble des éléments de G commutant avec tous les autres). Montrer que Z est un sous-groupe commutatif de G.

Exercice 2.11

Soit $\mathbb{U} = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$. Montrer que $(\mathbb{U}, \times)$ est un groupe.

Exercice 2.12

Soit $(G, \star)$ un groupe tel que pour tout x de G, $x^2 = 1$ (*rappel :* $x^2 = x \star x$).
Montrer que G est abélien. [4]

Exercice 2.13 ▲

Soit $G =]-1; 1[$, muni de la loi $\star$ défini par :
$\forall x \in G, \forall y \in G, x \star y = \dfrac{x+y}{1+xy}$. Montrer que $(G, \star)$ est un groupe.

Exercice 2.14

Soient A et B deux sous-groupes de $(G, .)$. Montrer que :

1. $A \cap B$ est un sous-groupe de G ;
2. ▲ $A \cup B$ est un sous-groupe de G si et seulement si ($B \subset A$ ou $A \subset B$).

Exercice 2.15

Soit $B = \left\{x + y\sqrt{3}, (x, y) \in \mathbf{Z}^2\right\}$. Montrer que B est un anneau pour l'addition et la multiplication déjà existante sur $\mathbf{R}$.

Exercice 2.16

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif, $a \in A$, $b \in A$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul :
$a^n - b^n = (a - b) \times (a^{n-1} + a^{n-2} \times b + a^{n-3} \times b^2 + \ldots + a \times b^{n-2} + b^{n-1})$.
2. En déduire que s'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $a^n = 0$, alors $1 - a$ et $1 + a$ sont inversibles.

4. Astuce : pourquoi $x^{-1} = x$ ici ? Puis montrer que pour tout $(x, y) \in G^2$, $(x \star y)^{-1} = y \star x$.

Exercice 2.17 ▲

Soit $(A, +, .)$ un anneau tel qu'il existe $(a, b) \in A^2$ tels que :
$a.b + b.a = 1_A$ et $a^2.b + b^2.a = a$.

1. Montrer que $a^2.b = b.a^2 = a.b.a$.
2. En considérant $(1 - ba)^2$, déduire que a est inversible, d'inverse $2b$.

[5]

5. Rappel : le ▲ signale un exercice plus difficile. Vous n'aurez donc pas de coup de pouce ici !

Chapitre 3

Suites usuelles

voir les exos de bcpst1

3.1 Rappel sur les suites arithmétiques et géométriques

3.2 Suites arithmético-géométriques

3.3 Suites vérifiant une relation du type $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

Chapitre 4

Quelques fonctions usuelles, telles qu'enseignées en post-bac

4.1 Un exemple d'introduction pour le vocabulaire de base

Exercice 4.1

Soit f la fonction continue et dérivable sur $\mathbf{R}$, définie pour tout réel x par $f(x) = x^2 + 1$.
On rappelle que l'on note cela : $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto x^2 + 1$.

1.(a) Montrer que pour tout réel x, $f(x) \in [1; +\infty[$.

> **Point info**
> Toutes les images par la fonction f appartiennent donc à $[1; +\infty[$.
> On note : $\mathbf{Im(f)} \subset [1; +\infty[$.

(b) Démontrer que tout réel $y \in [1; +\infty[$ admet au moins un antécédent $x \in \mathbf{R}$ par f.

> **Point info**
> Ainsi, $[1; +\infty[\subset$ Im(f). Donc : $[1; +\infty[=$ Im(f) (les ensembles sont égaux par double inclusion, voir chapitre 1).
> Quand, comme pour f, tout nombre appartenant à $[1; +\infty[$ admet au moins un antécédent, la fonction est dite **surjective** sur $[1; +\infty[$.

(c) f est-elle surjective sur $[0; +\infty[$?

2. Montrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

> **Point info**
> Ainsi, si $x \neq x'$ alors $f(x) \neq f(x')$. On dit que f est **injective** sur $[0; +\infty[$.

3. Soit $F : [0; +\infty[\to [1; +\infty[, x \mapsto f(x)$. Sur cet intervalle, on rappelle que la fonction F est à la fois injective et surjective. On dit alors que F est une fonction **bijective**.

> **Point info**
> Pour montrer qu'une fonction numérique réelle est **bijective** (ou qu'elle réalise une bijection), il suffit de montrer qu'elle est continue et strictement monotone sur l'intervalle considéré.
> Ainsi, comme F est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$, on dit alors que F réalise une **bijection** de $[0; +\infty[$ (ensemble de départ, correspondant aux abscisses) dans $[1; +\infty[$ (ensemble d'arrivée, correspondant aux ordonnées).

(a) Soit g la fonction définie pour tout réel $y \in [1; +\infty[$ par $g(y) = \sqrt{y-1}$. Vérifier que pour tout réel $x \in [0; +\infty[$, $g(F(x)) = x$.

(b) Vérifier de même que pour tout réel $y \in [1; +\infty[$ que l'on a également $F(g(y)) = y$.

Point info
Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, $f : I \to \mathbf{R}$.
Si f est continue et strictement monotone, alors $f : I \to J = f(I)$ est une **bijection**.
On appelle **fonction réciproque de** f l'unique fonction $g : J \to I$ vérifiant pour tout réel x de I : $g(f(x)) = x$ et pour tout réel y de J : $f(g(y)) = y$.
On note $\boxed{g = f^{-1}}$. En particulier f^{-1} est également continue et strictement monotone.
Dans l'exemple précédent, g est la fonction réciproque de F.

4.2 P'tits théorèmes, et après, c'est parti !

Définitions 4.1
Soit f définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$.

- On appelle **dérivée** de f en $c \in I$ la limite[1], si elle existe, de $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ quand h tend vers 0 tel que $c + h \in I$. On la note $f'(c)$.
- Une fonction est dite **dérivable** sur un intervalle I si pour tout $c \in I$, $f'(c)$ existe.
- Une fonction est dite **continue**[2] sur un intervalle I si pour tout $c \in I$, $\lim\limits_{h \to 0, c+h \in I} f(c+h) = f(c)$.

Théorèmes de dérivation (admis) 4.2 [3]

- Une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur un intervalle.
- Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. On suppose que $f : I \mapsto \mathbf{R}$ est dérivable, strictement monotone.

Alors : f^{-1} est dérivable en $b \Leftrightarrow f'(f^{-1}(b)) \neq 0$.
On a alors : $f^{-1\prime}(b) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

Rappel : le symbole $\Leftrightarrow$ est le symbole d'équivalence. Il peut se lire "si et seulement si".

Remarque 4.3
Les fonctions continues ne sont pas nécessairement dérivables (par exemple, la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 à cause de la "pointe").
Il faudra cependant le $XIX^{\text{ème}}$ siècle et la mathématicien allemand **Weierstrass** pour trouver des exemples de fonctions partout continues et nulle part dérivables.

4.3 La fonction Logarithme Népérien

Définition 4.4 [4]
On appelle **logarithme népérien**, et on note $\boxed{\ln}$, l'unique fonction définie et dérivable sur $]0; +\infty[$, telle que pour tout réel x strictement positif, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ et vérifiant $\ln(1) = 0$.
On admet que cela implique que $\ln'(u(x)) = u'(x)/u(x)$.

Exercice 4.2 **Relation algébrique**
Le but de cet exercice est de démontrer la propriété algébrique fondamentale vérifiée par la fonction ln : "*pour tout réel a et b strictement positifs,* $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$."

1. Soit a un réel strictement positif. Soit u la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = \ln(ax) - (\ln(a) + \ln(x))$. Montrer que u est constante.
2. En calculant $u(1)$, conclure.

[5]

1. Hors programme en TS mais voici quand même la définition : une fonction $f : I \mapsto J$ a pour limite $\lambda \in J$ si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in A$: "$|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \lambda < \epsilon|$"
2. Voici une autre définition, séquentielle celle-ci, possible de la continuité d'une fonction en un point : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I. f est dite continue en a si pour tout suite (a_n) d'éléments de I telle que $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$, on a $\lim n \to +\infty f(a_n) = f(a)$.
3. On ne rappellera pas ici les formules de dérivation usuelles, ni le théorème des valeurs intermédiaires, que vous connaissez déjà parfaitement !
4. Attention, dans cet ouvrage, j'ai choisi, comme cela se fait en post-bac, d'introduire la fonction logarithme népérien (ln) avant la fonction exponentielle (exp). On ne pourra donc pas utiliser les propriétés de exp pour démontrer celles du ln !
5. Astuce : une fonction dérivable est constante si sa dérivée est nulle.

Exercice 4.3 **Corollaires**

En déduire les propriétés suivantes, pour a et b deux réels strictement positifs :

1. $\ln(1/a) = -\ln(a)$.
2. $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$.
3. Pour tout entier naturel n, $\ln(a^n) = n\ln(a)$.
4. ▲ Pour tout entier relatif m, $\ln(a^m) = m\ln(a)$.

Remarque : les ▲ indiquent des questions plus difficiles. [6]

Exercice 4.4 **Histoire de limites et bijection**

1. Montrer que la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.
2. On admet qu'une fonction strictement croissante sur un intervalle a soit une limite finie soit tend vers $+\infty$.
   (a) En raisonnant par l'absurde et à l'aide du troisième corollaire, démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
   (b) En déduire que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.
3. Démontrer que la fonction logarithme népérien réalise une bijection de $]0;+\infty[$ dans $\mathbf{R}$.

4.4 La fonction exponentielle

Définition 4.5

On appelle **fonction exponentielle**, et on note $\boxed{\exp}$, la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

Remarque 4.6

Ainsi, pour tout réel x, $\ln(\exp(x)) = x$ et pour tout réel $y > 0$, $\exp(\ln(y)) = y$.

Exercice 4.5 **Premières propriétés**

1. Justifier brièvement que la fonction exponentielle réalise une bijection de $\mathbf{R}$ dans $[0;+\infty[$. En déduire le signe de cette fonction.
2. Démontrer, à l'aide du théorème du II), que pour tout réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$.
3. En déduire le tableau de variations complet de la fonction exponentielle.

Exercice 4.6 **Relation algébrique**

En utilisant la remarque précédente et les relations algébriques de la fonction logarithme népérien, démontrer les propriétés suivantes, valables pour tout réel a et b :

1. $\exp(0) = 1$;
2. $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ [*Astuce : calculer* $\ln(\exp(a)\exp(b))$] ;
3. $\exp(-a) = 1/\exp(a)$;
4. $\exp(a-b) = \exp(a)/\exp(b)$;
5. pour tout entier relatif m, $\exp(ma) = \exp(a)^m$.

Notation 4.7

La fonction exponentielle vérifie donc les mêmes propriétés que les puissances. En posant $\mathrm{e} = \exp(1)$, on a alors : $\exp(x) = \exp(x1) = \exp(1)^x = \mathrm{e}^x$.

6. Astuce : pour la question 1), calculer $\ln(1/a) + \ln(a)$.

4.5 Fonctions puissances

Exercice 4.7 **Introduction**

Justifier que pour tout entier naturel n et pour tout réel $x > 0$, $\exp(n\ln(x)) = x^n$.

Définition 4.8

Soit $a \in \mathbf{R}$. On appelle **fonction puissance** l'application allant de $]0;+\infty[$ dans $\mathbf{R}$ et qui à tout réel x strictement positif associe $x^a = e^{a\ln(x)}$.

Exemple 4.9

- $x^{1/2} = e^{1/2\ln(x)} = e^{\ln(\sqrt{x})} = \sqrt{x}$. Et oui, fondamentalement, la notation $x^{1/2}$ vient de là !
- Allez, une puissance plus funky : $\pi^\pi = e^{\pi\ln(\pi)} \approx 36,46$. Remarquons par ailleurs que $\pi^3 \approx 31$ et $\pi^4 \approx 97,41$ donc $\pi^3 < \pi^\pi < \pi^4$.

Exercice 4.8 **Représentations graphiques**

Représenter les différents fonctions puissances, avec $a < 0$, $a = 0$, $0 < a < 1$, $a = 1$, $a > 1$ (choisissez une valeur de a dans chacun des cas proposés et tracez les courbes dans un même graphique).

Exercice 4.9 **Propriétés**

Pour tous réels a et b et pour tous réels x et y strictement positifs, montrer, en utilisant la définition précédente, que :

1. $x^0 = 1$;
2. $(xy)^a = x^a y^a$;
3. $x^a x^b = x^{a+b}$;
4. $(x^a)^b = x^{ab}$.

Attention ! Ces propriétés nous semblent naturelles et donc non nécessaires à démontrer MAIS vous les connaissez quand a et b sont entiers. Ici, ils sont réels, donc peuvent être non entiers (et donc il faut démontrer les propriétés). C'est une généralisation de la définition de puissance que vous avez appris au collège.

Exercice 4.10 **Dérivation**

En admettant que la dérivée de e^u est $u'e^u$, démontrer que pour tout réel a, la dérivée de $x \mapsto x^a$ est $x \mapsto ax^{a-1}$.

Exercice 4.11 **Limites de référence▲**

1. Le but de cette question est de montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.
   (a) Soit $g :]0;+\infty[\to \mathbf{R}, x \mapsto \ln(x) - 2\sqrt{x}$. Déterminer ses variations et en déduire son signe.
   (b) En déduire que pour $x \geqslant 1$, $0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x} \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.
   (c) Conclure.
2. Pour a et b deux réels strictement positifs, démontrer que :
   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)^b}{x^a} = 0$ $\left(\textit{Astuce : essayer de faire apparaître } \dfrac{\ln(x^c)}{x^c} \textit{ où } c = a/b\right)$;
   (b) $\lim\limits_{x\to0^+} |\ln(x)^b| x^a = 0$;
   (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^a}{e^x} = 0$ (*Astuce : revenir à la définition de* x^a) puis que $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^a e^x = 0$.

4.6 Fonctions hyperboliques

4.6.1 Deux mots sur les fonctions sinus et cosinus

On ne va pas étudier ces deux fonctions ici[7]. On rappelle juste quelques propriétés, pour faire le lien avec les fonctions hyperboliques qui suivent.

Propriétés 4.10

- cosinus est une fonction paire ($\forall x \in \mathbf{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$). Sinus est une fonction impaire ($\forall x \in \mathbf{R}$, $\sin(-x) = -\sin(x)$).
- Pour toute fonction u définie de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, $x \mapsto \cos(u(x))$ est dérivable, de dérivée $x \mapsto -u'(x)\sin(u(x)$
- Pour toute fonction u définie de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, $x \mapsto \sin(u(x))$ est dérivable, de dérivée $x \mapsto u'(x)\cos(u(x))$.

Exercice 4.12 **Introduction aux fonctions hyperboliques**

Soit $\theta \in \mathbf{R}$. On rappelle que $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.
Montrer que $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ [8]

Définitions 4.11 [9]

On définit, pour tout réel x :

- le **cosinus hyperbolique** par $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$;
- le **sinus hyperbolique** par $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$;
- la **tangente hyperbolique** par $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$.

Exercice 4.13 **Propriétés diverses**

1. Montrer que la fonction cosinus hyperbolique :
   (a) est paire (c'est à dire que pour tout réel x, $\mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}(x)$) ;
   (b) est dérivable, de dérivée la fonction sh ;
   (c) est toujours supérieure ou égale à 1 .
2. Montrer que la fonction sinus hyperbolique :
   (a) est impaire (c'est à dire que pour tout réel x, $\mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}(x)$) ;
   (b) est dérivable, de dérivée la fonction ch.
3. Montrer que la fonction tangente hyperbolique :
   (a) est impaire ;
   (b) est dérivable, de dérivée la fonction $1 - \mathrm{th}^2 = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2}$;
   (c) est toujours inférieure ou égale à 1 en valeur absolue.
4. Représenter dans un même graphique les trois fonctions hyperboliques.
5. Montrer enfin que pour tout réel t, $\mathrm{ch}^2(t) - \mathrm{sh}^2(t) = 1$ et que $\mathrm{ch}(t) + \mathrm{sh}(t) = e^t$.

[10]

4.7 Exercices

4.7.1 Sur les fonctions de référence

Exercice 4.14 **Un exercice que l'on aurait pu vous poser cette année**

Résoudre le système suivant : $\begin{cases} x + y &= 10 \\ \ln(x) + \ln(y) &= 3\ln(2) \end{cases}$

7. Voir le cours de TS pour les définitions de ces fonctions.
8. Attention, réalisable uniquement après avoir vu la forme exponentielle des complexes.
9. ...qui sont donc un prolongement des définitions complexes de cosinus et sinus vues dans l'exercice précédent !
10. Remarque : ch (respectivement sh) a donc des similitudes avec cos (resp. sin) : parité ; dérivée ressemblantes ($cos'(u) = -u'sin(u)$ et $sin'(u) = u'cos(u)$)...

Exercice 4.15

Résoudre l'équation $3^{2x} - 2^{x+1/2} = 2^{x+7/2} - 3^{2x-1}$. [11]

Exercice 4.16

Résoudre l'équation suivante : $\left(\sqrt{x}\right)^x = x^{\sqrt{x}}$. [12]

Exercice 4.17

Résoudre sur $]0;+\infty[$: $2^x \geqslant x^2$.

Exercice 4.18

On admet que $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin(t)}{t} = 1$.

Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(x\ln(x))}{x}$.

Exercice 4.19 ▲

Résoudre le système suivant : $\begin{cases} x & = & \mathrm{ch}(2y) \\ 3\ln(x) & = & 2\ln(\mathrm{ch}(y)) \end{cases}$

On pourra montrer au préalable que $ch(2y) = 2ch^2(y) - 1.x = 1$ et $y = 0$. [13]

Exercice 4.20 **Relations fonctionnelles et fonctions hyperboliques**

1. Montrer que $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\mathrm{sh}(t)}{t} = 1$.
2. Montrer que pour tout réel t, $\mathrm{sh}(2t) = 2\mathrm{sh}(t)\mathrm{ch}(t)$.
3. Montrer que pour tout réel a et b, $\mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b) = \mathrm{ch}(a+b)$.
4. Exprimer $\mathrm{ch}(p) + \mathrm{ch}(q)$ à l'aide d'un produit de "ch". (*Astuce : poser* $p = a + b$ *et* $q = a - b$)

4.7.2 Sur les notions d'injectivité, de surjectivité et de composition de fonctions ▲.

Explications 4.12

Cette partie est un peu particulière. On rentre dans une partie plus difficile, plus abstraite, qui nécessite une définition claire et précise de l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité.

Sachez que ces exercices sont tous des exercices que j'ai posés au retour des vacances de la Toussaint 2019 en colles [14] de prépa BCPST (bio) (donc pas la plus difficile d'un point de vue mathématique). Cela vous donnera un aperçu de ce qui est attendu en prépa mais n'est donc à chercher qu'en cas de passion réelle pour les maths.

J'ai choisi d'ajouter cette partie, non initialement prévue, car cela fait partie des premières notions qui ont été abordées dans cette BCPST cette année-là, et sans doute la première notion véritablement de type post-bac.

Rappelons enfin que l'exemple d'introduction de ce chapitre aborde les notions d'injectivité et de surjectivité. L'exemple permet d'éclairer !

Définitions 4.13

- Soit E et F deux ensembles (de nombres par exemple). On dit que f est une **application** de E dans F si à tout élément x de E est associé un élément y de F. On note cela $f : E \to F, x \mapsto y$.
- f est dite **injective** si chaque élément x de E est envoyé sur un élément différent de F. En langage fonction, les éléments de F admettent au plus un antécédent par f.
- f est dite **surjective** si tout élément de l'espace d'arrivée F admet au moins un antécédent par f, c'est à dire si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

11. Vous devez trouver $x = 3/2$. On rappelle à toute fin utile que $x^{1/2} = \sqrt{x}$.
12. Vous devez trouver $x = 4$.
13. Rappel : quand on ne sait pas résoudre exactement une équation avec que des puissances de x (par exemple), un théorème de TS peut nous aider à justifier l'existence, voire même l'unicité. Enfin, je dis ça, je dis rien !
14. Ou khôlles. Ce sont les interrogations hebdomadaires qu'ont les élèves de prépa. 2 heures par semaine, dont les matières varient suivant les filières.

- F est dite **bijective** si elle est à la fois injective et surjective. En langage fonction, les éléments de F admettent toux exactement un antécédent par f.

Exemple 4.14

On considère la fonction carré $f : E \to F, x \mapsto x^2$.

- f est injective si $E = [0; +\infty[$ mais ne l'est pas si $E = \mathbf{R}$. En effet, si $E = \mathbf{R}$, alors 3 a plusieurs antécédents par f ($-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$).
- f est surjective si $F = [0; +\infty[$ mais pas si $F = \mathbf{R}$. En effet, quel que soit $y < 0$, il n'existe aucun $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
- f est donc bijective si $E = [0; +\infty[$ **et** si $F = [0; +\infty[$, autrement dit si on considère la fonction $f : [0; +\infty[\to [0; +\infty[, x \mapsto x^2$. On remarquera que cela correspond à l'intervalle sur lequel la fonction est strictement croissante.
- À noter que f est aussi bijective si $E =]-\infty; 0]$ **et** si $F = [0; +\infty[$, c'est à dire sur l'intervalle sur lequel la fonction est strictement décroissante.

Remarques 4.15

- On utilise très souvent la caractérisation suivante de l'injectivité d'une fonction (que l'on admettra) : « $f : E \to F$ est injective $\Leftrightarrow$ "$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$" ». À utiliser abondamment dans les exercices suivants.
- Pour la surjectivité, il suffit de démontrer que tout élément de l'espace d'arrivée admet bien au moins un antécédent.
- Ne pas perdre de vue qu'une fonction réelle injective sur E est une fonction strictement monotone sur E.

Définition 4.16 : **: composition de fonctions $g \circ f$**

Soit E, F et G trois ensembles.
Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$.
Alors[15] : $g \circ f : E \to G, x \mapsto g(f(x))$.

Exemple 4.17

Soit $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}^+, x \mapsto exp(x)$ et $g : \mathbf{R}^+ \mapsto \mathbf{R}, x \mapsto \ln(x+1)$.
Alors : $g \circ f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto \ln(exp(x) + 1)$.

Exercice 4.21 **Pour s'échauffer**

Donner l'expression, l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée de la fonction $g \circ f$, où $f : [3; 7] \to \mathbb{R}_+, x \mapsto 2x^2 + 4$ et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto 2\sqrt{x}$.

Exercice 4.22 **Exemple de question de cours en prépa**

Soit E, F et G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G. Montrer les trois propriétés suivantes :

1. f et g injectives $\Rightarrow g \circ f$ injective,
2. f et g surjectives $\Rightarrow g \circ f$ surjective,
3. f et g bijectives $\Rightarrow g \circ f$ bijective.

Exercice 4.23 **En lien avec la question de cours précédente**

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
2. Donner un contre-exemple pour la réciproque de la deuxième propriété de l'exercice précédent.

Exercice 4.24

Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to]0; +\infty[, x \mapsto \dfrac{e^x + 2}{e^{-x}}$ est bijective puis déterminer sa fonction réciproque.

15. Faire le lien avec Chasles ! On va de E dans F puis de F dans G donc de E dans G.

Exercice 4.25

Soit E, F et G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G. Montrer les deux propriétés suivantes :

1. $g \circ f$ injective et f surjective $\Rightarrow$ g injective,
2. $g \circ f$ surjective et g injective $\Rightarrow$ f surjective.

Exercice 4.26

Soit E un ensemble et $p : E \to E$ vérifiant $p \circ p = p$.
Montrer que p est injective $\Leftrightarrow$ p est surjective $\Leftrightarrow$ $\forall x \in E, p(x) = x$.

Exercice 4.27

Soit E et F deux ensembles. Soit $f : E \to F$.
Soient les propositions

- P_1 : « Pour tout sous-ensemble A et B de E, $f(A \cap B) = \varnothing \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \varnothing$ »
- P_2 : « f est injective ».

1. Écrire avec des quantificateurs les négations de P_1 et de P_2.
2. Montrer que P_1 et P_2 sont équivalents.

Chapitre 5

Initiation au dénombrement

D'après le Petit Larousse illustré de 2005 :

- Dénombrement : n.m. Action de dénombrer, de compter [...].
- Dénombrer : v.t Faire le compte des unités composant un ensemble [...].

Bref, le dénombrement est l'art de compter correctement les éléments d'un ensemble... Et nous allons voir que ce n'est pas si simple que cela !

Avertissement 5.1

Ce chapitre est construit de manière un peu particulière. J'ai mis au début de chaque section un exemple pour que vous compreniez le propos avant de rentrer dans la théorie et le vocabulaire compliqué. De même, j'ai mis les exemples pour les formules avant ces dernières, afin que vous puissiez vous rendre compte que ces formules ne sont pas si compliquées et font surtout appel à votre bon sens.

Je vous invite néanmoins à tester les formules au fur et à mesure avec l'exemple précédent la formule : cela permettra de vérifier que vous avez juste et que vous savez rentrer une formule dans la calculatrice (capacité loin d'être évidente !).

5.1 Cardinal et listes

Exemple 5.2

Vous lancez un dé tétraèdrique dont les faces sont numérotées de 1 à 4.
On note E l'ensemble des issues de l'expérience.
Le **cardinal** de E est le nombre d'éléments de E, c'est à dire 4.
Une **2-liste** de E est une liste composée de 2 éléments de E, par exemple $(2\ ;\ 1)$ ou $(3;3)$.
Attention, **l'ordre** des éléments est important : la liste $(2;1)$ n'est pas la même que la liste $(1;2)$.

Définition 5.3

On considère un ensemble fini E.
Le **cardinal** de E est le nombre d'éléments appartenant à E. On le note $\boxed{\text{card(E)}}$.

Remarque 5.4

À présent et jusqu'à la fin du chapitre, on considérera un ensemble fini E de cardinal $n \in \mathbf{N}^\star$.

Définition 5.5

Soit p un entier naturel inférieur ou égal à n.
Une $p-$liste d'éléments de E est une liste ordonnée constituées de p éléments de E.

Remarque 5.6

Ces éléments peuvent être distincts ou non.

Exercice 5.1

On lance un dé cubique numéroté de 1 à 6. On note E l'ensemble des issues de l'expérience.

1. Donnez $card(E)$.
2. Donnez une $3-$ liste de E.
3. Dénombrer, c'est-à-dire déterminer le nombre, de $3-$ listes de E. [1]

1. On pourra pour la question 3 s'aider d'un arbre. De manière générale, utiliser un arbre est plutôt une bonne idée si l'on est perdu !

Proposition 5.7
Le nombre de $p-$listes de E est n^p.

Exercice 5.2 **Démonstration**

Démontrer la proposition précédente.

Méthode 5.8 : **Principe multiplicatif**
Si une situation comporte p étapes offrant respectivement n_1, n_2, ... n_p possibilités alors le nombre total d'issues est : $n_1 \times n_2 \times \ldots n_p$.

Par exemple, si, pour une voiture, vous devez choisir entre 5 couleurs, 3 types de moteur et 2 type de climatisation, vous aurez en tout $5 \times 3 \times 2 = 30$ combinaisons.

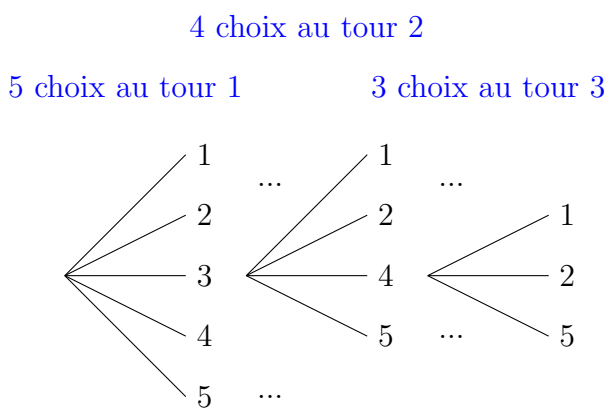
C'est **le principe fondamental en dénombrement !**

5.2 Arrangements

On rappelle que jusqu'à la fin de ce chapitre, on considère un ensemble fini E de cardinal $n \in \mathbf{N}^\star$.

Exemple 5.9
5 boules numérotées de 1 à 5, indiscernables au toucher, sont dans une urne opaque. Vous piochez **sans remise** trois fois une boule dans l'urne.

Vous avez 5 possibilités pour la première boule. En revanche, comme vous n'avez pas remis la première boule dans l'urne, vous n'avez plus que 4 possibilités pour la 2nde. De même, vous n'avez plus que 3 possibilités pour la dernière.



Il y a $5 \times 4 \times 3 = 60$ combinaisons de résultats possibles.

Chaque combinaison, constitué d'éléments 2 à 2 distincts, est une 3-liste sans répétition, dite aussi 3-arrangement, de l'ensemble des issues possibles.

Le nombre de $3-$ listes sans répétition d'éléments que l'on peut obtenir avec cet ensemble à 5 éléments se note A_5^3.

Définition 5.10
Soit p un entier naturel non nul inférieur ou égal à n.
Une $p-$ liste sans répétition d'éléments de E est une $p-$ liste d'éléments de E tous distincts.
On note A_n^p le cardinal de cet ensemble.

Remarque 5.11
En langage moderne, A_n^p est le nombre de suites de p objets distincts pris parmi n.

Exercice 5.3

Lors d'une épique compétition hippique, 8 chevaux, portant les numéros de 1 à 8, concourent. Johanne choisit un Tiercé gagnant au hasard, c'est-à-dire une combinaison de 3 chevaux arrivant respectivement premier, deuxième et troisième.
Johanne, joueuse, choisit le tiercé $4 - 2 - 1$. Elle se demande néanmoins de combien de manières différentes elle aurait pu remplir cette grille.
Répondez à sa question. [2]

2. Posez-vous la question : "Combien de choix sont possibles pour le premier cheval ? Une fois que j'en ai choisi un, combien de choix pour le deuxième ? Puis pour le troisième ?". Un arbre peut aider à raisonner également.

Proposition 5.12
Dans le cadre des notations de la définition précédente,

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1) = \prod_{k=0}^{p-1}(n-k)$$

Remarque 5.13
Remarquons que la notation avec le symbole produit permet de tout de suite identifier le fait que le produit est constitué de p facteurs, commençant à n et diminuant de 1 à chaque fois.

Exemple 5.14
Dans le cadre du premier exemple de cette partie, on avait $A_5^3 = 60$.
Or : $5 \times (5-1) \times (5-2) = 60$. Ça semble marcher !

Exercice 5.4 **Démonstration**
Démontrer la formule précédente.

Remarque 5.15
J'attends d'ici la complainte d'élèves désabusés : "Hey, mais s'il existe une formule, pourquoi ne pas la voir avant les exercices, diantre ? Cela nous affranchirait du dessin d'arbres ma foi fort peu évidents" [3].
Je veux que vous compreniez les formules avant de les appliquer comme des automates, voilà pourquoi ! Tout ce que nous voyons dans ce chapitre peut être retrouvé avec du bon sens (enfin, au début). Il ne faut surtout pas le perdre de vue si vous êtes perdus ! Faites des dessins.

5.3 Permutations

Exemple 5.16
Léa, joueuse également aux courses hippiques, décide de tenter "l'octo-plus", c'est-à-dire une combinaison d'arrivée des 8 chevaux.
Une telle combinaison, reprenant l'intégralité des éléments de E exactement une fois, est appelée **permutation** [4]
Léa avait le choix entre $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$ possibilités.
...
Hey mais attendez ! Ce ne serait pas 8!, par hasard [5] ?

Définition 5.17
Une **permutation** de E est une $n-$ liste sans répétition de E.
Dit autrement, c'est une liste constituée de tous les éléments de E, chacun apparaissant une unique fois.
Somme toute, une permutation est un arrangement de taille n. Et voilà !

Exemple 5.18
Soit $E = \{A, B, C\}$.
Les permutations de E sont $(A, B, C), (A, C, B), (B, A, C), (B, C, A), (C, A, B), (C, B, A)$.
Bref, ce sont les trois lettres constituant E, dont on a permuté [6] les places.

Exercice 5.5
Dans le jeu des 7 familles, chaque famille est constituée de 6 cartes.

1. De combien de manières peut-on ordonner une famille de 6 cartes ?
2. De combien de manières peut-on ordonner les 42 cartes du jeu ?

3. Oui, l'élève du 21ème siècle s'exprime ainsi, pourquoi ?
4. Signifiant : toutes les combinaisons ont les mêmes éléments mais ils ne sont pas forcément à la même place.
5. Voir chapitre 1 pour la notation factorielle. On rappelle que cela se lit "8 factorielle"... Comme je suis sympa, voir la proposition suivante en cas de doute.
6. Et oui, ça vient de là !

Proposition 5.19

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$.

Exercice 5.6 **Démonstration**

Démontrer la proposition précédente.

Remarque 5.20

On retient que les arrangements et les permutations sont associés au tirage sans remise ou au nombre de possibilités de classement (dans une course par exemple). À adapter suivant le contexte bien sûr !

5.4 Combinaisons et coefficient binomial

Exemple 5.21

Reprenons notre jeu des 7 familles. Vous prenez 3 cartes parmi une des familles, celle-ci étant constituée des 6 cartes suivantes : L'élève Fille, L'élève Garçon, La Prof Fille, Le Prof Garçon, La CPE Fille, Le CPE Garçon.

Que vous tiriez "Élève Fille - Prof Fille - Prof Garçon" ou "Élève Fille - Prof Garçon - Prof Fille", finalement, votre main sera exactement la même.

Vous venez de tirer **un ensemble non ordonné** de 3 cartes : l'ordre dans lequel vous les avez tirées n'importe pas !

On parle alors de 3-**combinaison**.

Définition 5.22

Une p-**combinaison** d'éléments de E est une partie de E à p éléments non ordonnés.

Exercice 5.7 ▲

On reprend le contexte de l'exemple précédent. On prend une des familles (constituée donc de 6 cartes). On mélange cette famille et on pioche 3 cartes.
Montrer que le nombre de mains constituées de trois cartes différentes que l'on peut réaliser est 20.

Proposition 5.23

Le nombre de p combinaisons d'un ensemble à n éléments est $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$, ce que l'on note $\binom{n}{p}$.

Remarque 5.24

Autre manière de le dire, $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.

Remarques 5.25

- Et oui, on retrouve l'expression du coefficient binomial ! Rappelons en effet que dans un schéma de Bernoulli, $\binom{n}{p}$ représente le nombre de chemins à p succès **parmi** les n répétitions. Ce sont donc toutes les combinaisons de chemins passant par p -succès. D'où ce résultat !
- On pourra donc appliquer sans une once de scrupules les théorèmes de fin de chapitre, qui ont été déjà démontrées en première.
- Mais avant ces théorèmes, on retiendra que l'on emploiera $\binom{n}{p}$, qui se lit "p parmi n", dès que l'on réalise **le tirage simultané de p objets parmi un ensemble de taille n.**

Exercice 5.8

Dans certaines variantes du Poker, chaque joueur a en main 5 cartes, piochées parmi un jeu de 52 cartes.
Combien de main sont possibles dans ces variantes ?

Exercice 5.9

Démontrer la proposition précédente.

Théorèmes 5.26

- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
- $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$ (formule du triangle de Pascal)

Remarques 5.27

Vous avez déjà démontré ces propriétés en première. Relisez les démonstrations, vous pourrez ainsi faire le lien avec ce cours.

5.5 Lien avec les probabilités

5.5.1 Calculs "simples"

Exercice 5.10

Vous lancez 6 dés discernables (par leur couleur) cubiques, tous numérotés de 1 à 6 et tous équilibrés.

1. Déterminer le nombre total de combinaisons possibles.
2. Déterminer le nombre total de combinaisons comprenant 6 résultats différents.
3. En déduire la probabilité d'obtenir 6 résultats différents en lançant 6 dés cubiques.

Remarque 5.28

Depuis que vous étudiez les probabilités, lorsque l'on travaille dans un contexte d'équiprobabilité[7], la probabilité d'un événement A si l'on travaille dans un univers Ω est

$$p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}.$$

C'est ce que vous avez fait naturellement dans l'exemple précédent !

Exercice 5.11 **Loto**

Jouer au loto consiste à choisir 5 numéros dans une grille contenant 49 cases, et cocher un numéro dans une grille supplémentaire contenant 10 cases.

1. Combien de combinaisons existent-ils ?
2. Kaan joue toutes les semaines au loto. En approchant une année à 52 semaines, combien de temps devrait-il jouer pour jouer toutes les grilles ?
3. Déterminer la probabilité de gagner le gros lot, correspondant à une seule combinaison.

7. Ici assurer par le fait que tous les dés sont équilibrés.

5.5.2 Loi binomiale

Exercice 5.12

On considère une urne contenant 10 boules indiscernables au toucher. 7 d'entre elles sont vertes et 3 sont rouges.
On procède à 5 tirages **avec remise**.
On souhaite déterminer la probabilité de tirer 4 boules vertes.

1. Tracer un arbre représentant ce schéma de Bernoulli[8] serait fastidieux mais n'hésitez pas si cela peut vous aider.
   Justifier que le nombre de chemins passant exactement par 4 événements "Tirer une boule verte" est $\binom{5}{4}$.
2. Justifier que la probabilité d'un tel chemin est $0,7^4 \times 0,3^1$.
3. Conclure

Définition 5.29

- Une expérience de Bernoulli est une expérience aléatoire à 2 issues (généralement appelées Succès et Échec). Elle a pour paramètre la probabilité du succès, notée généralement $0 \leqslant p \leqslant 1$.
- Un schéma de Bernoulli est la répétition de $n \in \mathbf{N}^\star$ épreuves de Bernoulli de paramètres p. Ces répétitions sont identiques et indépendantes.
  Un tel schéma de Bernoulli a pour paramètres n et p.
- Soit X la variable aléatoire discrète comptant le nombre de succès parmi les n répétitions d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
  Alors X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Théorème 5.30

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p alors pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Exercice 5.13 **Démonstration**

Démontrer le théorème précédent

5.5.3 Loi hypergéométrique

Exercice 5.14

On considère une urne contenant 10 boules indiscernables au toucher. 7 d'entre elles sont vertes et 3 sont rouges.
On procède à 5 tirages **sans remise**.
On souhaite déterminer la probabilité de tirer 4 boules vertes.

1. Tracer un arbre représentant l'expérience aléatoire serait fastidieux mais n'hésitez pas si cela peut vous aider.
2. Donner sous la forme d'un coefficient binomial le nombre total d'issues correspondant à un tirage sans remise de 5 boules parmi les 10 boules de base.
3. Justifier que le nombre d'issues réalisant l'événement obtenir 4 boules vertes est $\binom{7}{4} \times \binom{3}{1}$.
4. Conclure.

Définition 5.31

On considère un ensemble E de cardinal n, partitionné[9] en deux sous-ensembles A_1, A_2 de cardinal respectif r_1 et r_2.

En particulier, $r_1 + r_2 = n$.

On extrait au hasard et **simultanément** m éléments de E.

Notons X la variable aléatoire comptant le nombre d'éléments k de A_1 parmi les m extraits (remarquons qu'il y a alors $m - k$ éléments de A_2).

X suit alors une loi dite **hypergéométrique** et

$$P(X = k) = \frac{\binom{r_1}{k} \times \binom{r_2}{m-k}}{\binom{n}{m}} = \frac{\binom{r_1}{k} \times \binom{n-r_1}{m-k}}{\binom{n}{m}} \text{ pour } k \in \mathbf{N}, k \leqslant m \leqslant r_1 \leqslant n$$

Remarque 5.32 : **Lien avec l'exercice précédent**

Par rapport à l'exercice précédent :

- E correspond aux $n = 10$ boules de l'urne ;
- A_1 correspond aux $r_1 = 7$ boules vertes (et A_2 aux $r_2 = 3$ boules rouges) ;
- m correspond aux 5 tirages sans remise (donc $m = 5$), le sans remise correspondant au "simultanément".
- X compte le nombre de boules vertes.
- La probabilité d'obtenir 4 boules vertes est donc $P(X = 4) = \dfrac{\binom{7}{4} \times \binom{3}{1}}{\binom{10}{5}}$. En effet, on a tiré 4 boules parmi les 7 vertes, 1 boule parmi les 3 rouges (donc un total de 5 boules) et on divise par le nombre total de combinaisons d'un tirage de 5 boules parmi les 10 de base.
- On remarque que $P(X = k)$ dépend, en paramètres, de n, m et r_1. Ce sont les paramètres de la loi hypergéométrique.

Remarque 5.33

On retient que l'on modélise avec une loi **binomiale** lors d'un tirage **avec remise** et avec une loi **hypergéométrique** lors d'un tirage **sans remise**.

Remarque 5.34

Si n est très grand devant (au moins 10 fois supérieur à) m, on peut assimiler une loi hypergéométrique à une loi binomiale (plus simple à calculer pour les ordinateurs) de paramètres m et $p = \dfrac{r_1}{n}$.

Cette approximation se comprend ainsi : si le nombre de jetons dans une urne est très grand, le fait d'effectuer quelques tirages dans cette urne ne va pas bouleverser les proportions.

5.6 Exercices

Exercice 5.15

Nicolas, ami de Johanne remplit également la grille du quinté, constituée de 5 chevaux vainqueurs parmi les 8 chevaux. On rappelle que les chevaux sont classés.
Combien de possibilités pour remplir sa grille a-t-il ?

Exercice 5.16 **Seul l'âne a un gramme**

Un anagramme d'un mot est un mot constitué exactement des mêmes lettres éventuellement mélangées.
Par exemple, un anagramme de MATHS est ATHMS. Cela ne veut rien dire mais c'est un anagramme.
Combien d'anagrammes du mot MATHS peut-on écrire ?[10]

9. Dit autrement, $\overline{A_1} = A_2$
10. La question est donc : combien de mots de 5 lettres distinctes peut-on écrire avec les lettres du mot "MATHS" ?

Exercice 5.17 L'âne a deux grammes

1. Déterminer le nombre d'anagrammes de "MATHS" commençant par A.
2. Déterminer le nombre d'anagrammes de "PHYSIQUE" commençant par une voyelle et finissant par une consonne.

Exercice 5.18 En lien avec applications injectives et bijectives

Démontrer les résultats suivants :

1. Le nombre d'applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est n^p.
2. Le nombre d'application injectives d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est A_n^p.
3. Le nombre d'applications bijectives entre deux ensembles à n éléments est $n!$. [11]

Exercice 5.19 Le Pot-Caire

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 52 cartes, l'ensemble obtenu étant une main.
On rappelle qu'une carte est définie par sa valeur (de 1 à 10, avec valet, dame et roi en plus, soit 13 cartes) et sa couleur (pique, carreau, trèfle, coeur).

1. Combien peut-on former de main de 5 coeurs ?
2. Déterminer le nombre de mains correspondant aux combinaisons suivantes :
   (a) la paire (deux cartes de valeur identique) ;
   (b) le brelan (trois cartes de valeur identique) ;
   (c) le full (un brelan et une paire)
   (d) la quinte flush (une suite de 5 cartes d'une même couleur). La plus petite suite est $1, 2, 3, 4, 5$ et la plus grande $10, Valet, Dame, Roi, As$.
   (e) la quinte (5 cartes qui se suivent, avec au moins deux couleurs. Par exemple, 7♣8♣9♠10♡$Valet$♣).
   (f) la couleur (5 cartes d'une même couleur, qui ne sont pas toutes consécutives) ;.
3. Préciser pour chacune des mains précédentes le probabilité d'obtenir une telle main.
4. Au poker, la meilleure main emporte la mise des différents joueurs.
   Dans les règles, une paire est plus faible qu'un brelan, qui est plus faible que la quinte, qui est plus faible que la couleur, qui est plus faible que le full, qui est plus faible que la quinte flush.
   Cela vous semble-t-il pertinent ?

Exercice 5.20 Happy birthday !

On choisit $n \in \mathbf{N}^\star$ personnes au hasard. On suppose qu'aucune n'est née le 29 février et que $n \leqslant 365$.

1. Exprimer en fonction de n la probabilité qu'au moins deux personnes aient la même date d'anniversaire.
2. Dans une classe de 36 élèves, quelle est la probabilité que 2 personnes aient la même date d'anniversaire ?
3. À partir de combien de personnes est-on sûr à 99% que deux personnes au moins ont la même date d'anniversaire ? [12]

11. On rappelle qu'une application $E \to F$ est injective si tout élément de F admet au plus un antécédent dans E. Elle est surjective si chaque élément de F admet au moins un antécédent dans E. Elle est bijective si elle est à la fois injective et surjective.
12. Pour la question 1, on pourra calculer la probabilité de l'événement contraire.

Exercice 5.21 Loi binomiale, loi hypergéométrique ou les deux

Dans le célèbre jeu télévisé "Mathéquizz", les candidats, répartis en deux équipes (Analyse et Algèbre), s'affrontent dans une manche de rapidité. La réponse à la question est soit "loi binomiale", soit "loi hypergéométrique", soit "les deux" si la réponse concerne les deux lois de probabilités.
Déterminer la réponse à chacune des questions.
On précisera, lorsque cela est possible, les paramètres des lois.

1. "Fait intervenir le coefficient binomial".
2. "Modélise un tirage sans remise".
3. "Modélise un tirage avec remise".
4. "Si on lance 100 billes sur une surface percée de 10 trous équirépartis de 10 couleurs différentes, chaque trou pouvant éventuellement accueillir les 100 billes, le nombre de billes dans le trou rouge (en supposant que les 100 billes tombent nécessairement toutes dans un trou) suit une ..."
5. "Si on effectue 5 tirages d'une bille avec remise, dans un sac contenant 25 billes rouges et 75 billes noires, le nombre de fois que l'on a obtenu une bille rouge suit..."
6. "Est lié au français Pascal (le philosophe, pas le chanteur)".
7. "Si on pioche en une fois 5 jetons dans une urne contenant 26 jetons, sur lesquels figurent les 26 lettres de l'alphabet (chaque jeton a une lettre différente des autres jetons), le nombre de voyelles dans les 5 lettres piochées suit ..."
8. "Si on lance 5 dés, le nombre de 6 obtenus suit..."
9. "On suppose que 1% des trèfles possèdent 4 feuilles. On cueille 100 trèfles et X est le nombre de trèfles à 4 feuilles cueillis. X suit une ..."
10. "Un coffre à jouets contient 6 cubes, 5 boules et 7 tétraèdres. On extrait successivement et sans remise 4 objets du coffre. Si X est la variable aléatoire comptant le nombre cubes alors X suit une ..."

Exercice 5.22

On se place dans le contexte de l'affirmation 5 de l'exercice intitulé "Loi binomiale, loi hypergéométrique ou les deux".

1. Déterminer la probabilité la probabilité d'obtenir exactement 2 boules rouges.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir au moins 3 boules noires.
3. Déterminer le nombre moyen de boules rouges tirées parmi les 5 boules. [13]

Exercice 5.23

On se place dans le contexte de l'affirmation 7 de l'exercice intitulé "Loi binomiale, loi hypergéométrique ou les deux".

1. Déterminer la probabilité de piocher exactement 2 voyelles.
2. Déterminer la probabilité de tirer au moins 4 voyelles.
3. Déterminer le nombre moyen de voyelles piochées parmi les 5 jetons. [14]

13. Rappel : la moyenne, en probabilités, est associée à l'espérance.

14. Rappel : la formule générale de l'espérance est la suivante, pour une variable aléatoire Y à valeurs dans un ensemble discret E : $\sum_{k \in E} kP(Y = k)$.

Chapitre 6

Quelques calculs d'intégrales atypiques

Ce chapitre est quelque peu atypique par sa forme. Plus ou moins pas de cours ici, seulement des exercices.

Par souci de cohérence, les exercices ont été regroupés par thème.

Bonne chance !

6.1 Formule de l'intégration par parties et applications

Exercice 6.1 **Mise en place de la formule**

Soient u et v deux fonctions continues et dérivables sur un intervalle $[a;b]$. A l'aide de la formule de la dérivée du produit, démontrer la formule suivante, appelée formule d'intégration par parties (IPP) :

$$\int_a^b u'(x) \times v(x)\mathrm{d}x = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \times v'(x)\mathrm{d}x$$

Exemple d'utilisation 6.1

Supposons que l'on veuille par exemple calculer $\displaystyle\int_0^1 xe^x\mathrm{d}x$.

Avec les méthodes de terminales, il faudrait trouver une primitive de $f : x \mapsto xe^x$, ce qui est loin d'être évident. En revanche, on peut trouver facilement une primitive de $x \mapsto e^x$ et on peut facilement dériver $x \mapsto x$.

Ainsi, on posant $\left\{\begin{array}{lcl} u' & : & x \mapsto e^x \\ v & : & x \mapsto x \end{array}\right.$ c'est à dire $\begin{array}{lcl} u & : & x \mapsto e^x \\ v' & : & x \mapsto 1 \end{array}$, on a alors, en appliquant la formule de **l'IPP (intégration par parties)** [1] :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^1 e^x x\mathrm{d}x & = & [e^x \times x]_0^1 - \int_0^1 e^x \times 1\mathrm{d}x \\ & = & e^1 - \int_0^1 e^x\mathrm{d}x \\ & = & e^1 - [e^x]_0^1 \\ & = & e^1 - (e^1 - e^0) \\ & = & 1 \end{array}$$

Remarque 6.2

Au passage, on a discrètement fait apparaître une fonction densité ! C'est beau, les maths quand même...

Méthode 6.3 : **pour appliquer la formule de l'IPP**

De manière générale, il faut chercher à dériver prioritairement les puissances positives de x, puis la fonction ln et les fonctions trigonométriques.

En effet, on dérivant les puissances positives de x, celles-ci diminuent de 1 à chaque fois. Fatalement, on va finir par dériver $x \mapsto x$, qui donnera $x \mapsto 1$. Ainsi, on aura fait "disparaître" une des fonctions, ce qui nous permettra de nous concentrer sur ce qu'il reste.

1. Remarquons que, présenté ainsi, on suit un chemin formant un angle : d'abord uv puis uv'.

Exercice 6.2 Premières applications

Chacune des questions de cet exercice est indépendante des autres.

1. En utilisant deux fois de suite la formule de l'IPP, calculer $\displaystyle\int_0^1 e^x x^2 \mathrm{d}x$.

   On pourra judicieusement poser $u' : x \mapsto e^x$ *et* $v : x \mapsto x^2$.

2. En utilisant le fait que, pour $x \in]0;+\infty[$, $\ln(x) = 1 \times \ln(x)$, déterminer la valeur de $\displaystyle\int_1^t \ln(x)\mathrm{d}x$, où $t > 1$. En déduire une primitive de la fonction ln.

3. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 cos(x)\mathrm{d}x$ (*Rappel : sin′ = cos et cos′ = −sin*).

4. Soient les deux intégrales définies par $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x$.

   (a) Démontrer que $\mathrm{I} = -\mathrm{J}$ et que $\mathrm{I} = \mathrm{J} + \mathrm{e}^{\pi} + 1$ (*Rappel : sin′ = cos et cos′ = −sin*).

   (b) En déduire les valeurs exactes de I et de J.

5. On pose $\mathrm{K} = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}\mathrm{d}x$ et $\mathrm{L} = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x$.

   Calculer K et L en raisonnant par combinaison avec K et L, à l'instar de la question précédente.

Exercice 6.3 Théorème de Taylor avec reste intégral

Partie A : Notion de dérivée $n^{\text{ième}}$

On appelle dérivée d'ordre n, où n est un entier supérieur ou égal à 1, d'une fonction g la dérivée (si elle existe) de $g^{(n-1)}$, où $g^{(n-1)}$ désigne la dérivée d'ordre $(n-1)$ de g. On convient par ailleurs que $g^{(0)} = g$.
Ainsi, si g est dérivable, $g' = g^{(1)}$ et si g' est dérivable, $g'' = (g')' = g^{(2)}$.

1. *Un premier exemple.* Soit $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto x^3+3x+7$. Montrer que pour tout réel x, $h^{(2)}(x) = 6x$.
2. *Pour la fonction exponentielle, notée exp.*
   Montrer que pour tout entier naturel n, $exp^{(n)}$ existe et vaut exp.

Partie B : démonstration d'un célèbre théorème

D'après le premier écrit du CAPES de mathématiques, 2016
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère une fonction f dérivable n fois sur un intervalle I. Soient a et b deux nombres réels a et b dans l'intervalle I.

1. Justifier que $f(b) = f(a) + \displaystyle\int_a^b f'(t)dt$.
2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que si $n \geqslant 2$ alors
$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \int_a^b f''(t)(b-t)dt.$$
3. Montrer que si $n \geqslant 2$ alors
$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + f^{(2)}(a)\frac{(b-a)^2}{2!} + \ldots + f^{(n-1)}(a)\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \int_a^b \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(b-t)^{n-1}dt.$$
   Cette égalité est connue sous le nom de formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n. [2] [3]

2. Pour tout entier k strictement positif, on note $k!$ le produit des entiers strictement positifs inférieurs à k. Cela se lit "k factoriel". Par exemple, $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$.
3. Pour les questions 2 et 3 de la partie B, commencez par vous occuper de l'intégrale.

Partie C : application pour déterminer une valeur approchée de e^1

Dans cette partie, on considère $f = exp$, $a = 0$ et $b = 1$.

1. Montrer que $\lim\limits_{n+\infty} \displaystyle\int_a^b \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(b-t)dt = 0$.
2. (a) Calculer $e^1 = f(1)$ avec la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 4.
   (b) En négligeant le dernier terme, déterminer une valeur approchée de e^1.[4]

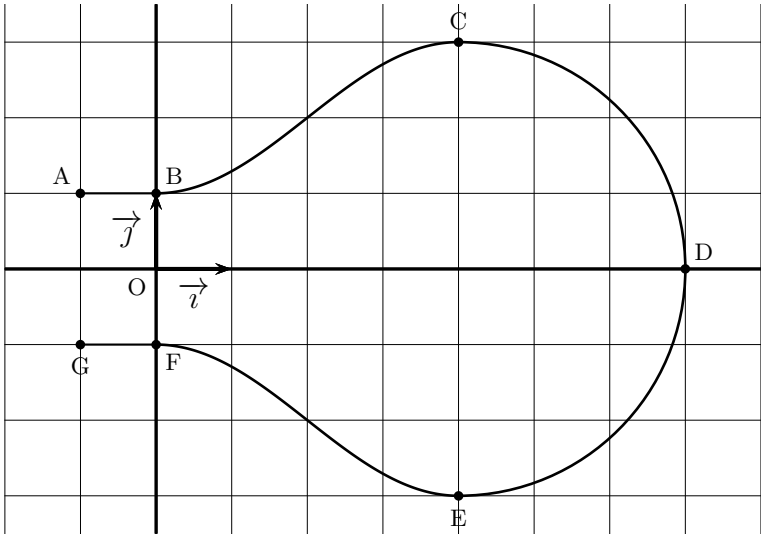
6.2 Calcul intégral et volume

Exercice 6.4 **Extrait du sujet de baccalauréat Polynésie, juin 2018**

Dans cet exercice, on s'intéresse au volume d'une ampoule basse consommation.

Partie A - Modélisation de la forme de l'ampoule

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
On considère les points A$(-1\ ;\ 1)$, B$(0\,;\,1)$, C$(4\,;\,3)$, D$(7\,;\,0)$, E$(4\ ;\ -3)$, F$(O\ ;\ -1)$ et G$(-1\ ;\ -1)$.
On modélise la section de l'ampoule par un plan passant par son axe de révolution à l'aide de la figure ci-dessous :



La partie de la courbe située au-dessus de l'axe des abscisses se décompose de la manière suivante :

- la portion située entre les points A et B est la représentation graphique de la fonction constante h définie sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$ par $h(x) = 1$;
- la portion située entre les points B et C est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par $f(x) = a + b\sin\left(c + \frac{\pi}{4}x\right)$, où a, b et c sont des réels non nuls fixés et où le réel c appartient à l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$;
- la portion située entre les points C et D est un quart de cercle de diamètre [CE].

La partie de la courbe située en-dessous de l'axe des abscisses est obtenue par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

1. (a) On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f. Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,4]$, déterminer $f'(x)$.
   (b) On impose que les tangentes aux points B et C à la représentation graphique de la fonction f soient parallèles à l'axe des abscisses. Déterminer la valeur du réel c.
2. Déterminer les réels a et b.

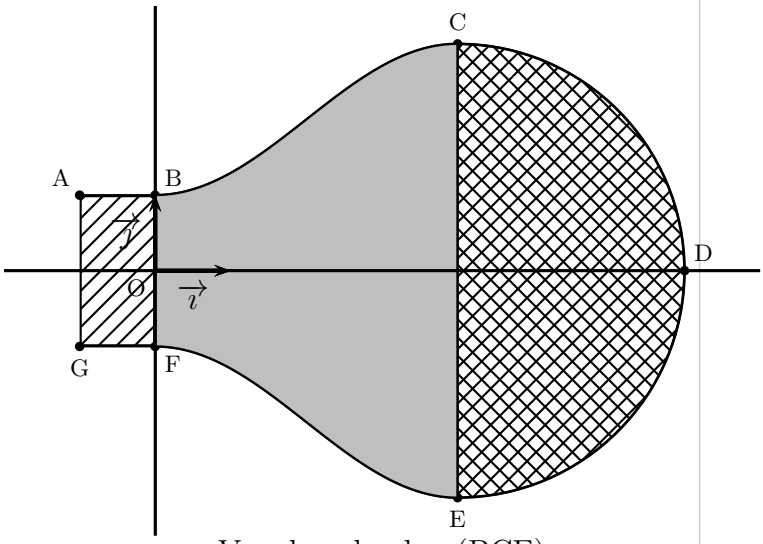
4. Pourquoi ? Grâce à la question 1, tout simplement.

Partie B - Approximation du volume de l'ampoule

Par rotation de la figure précédente autour de l'axe des abscisses, on obtient un modèle de l'ampoule. Afin d'en calculer le volume, on la décompose en trois parties comme illustré ci-contre.
On rappelle que :

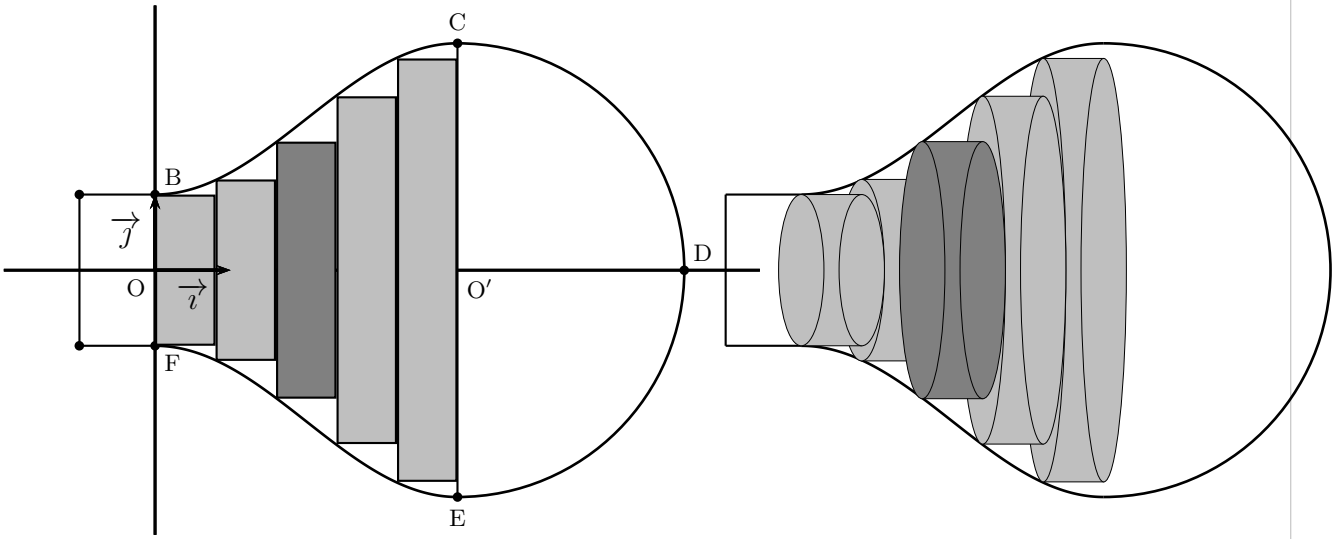
- le volume d'un cylindre est donné par la formule $\pi r^2 h$ où r est le rayon du disque de base et h est la hauteur ;
- le volume d'une boule de rayon r est donné par la formule $\frac{4}{3}\pi r^3$.

On admet également que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,4]$, $f(x) = 2 - \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.



Vue dans le plan (BCE)

1. Calculer le volume du cylindre de section le rectangle ABFG.
2. Calculer le volume de la demi-sphère de section le demi -disque de diamètre [CE].
3. Pour approcher le volume du solide de section la zone grisée BCEF, on partage le segment [OO′] en n segments de même longueur $\frac{4}{n}$ puis on construit n cylindres de même hauteur $\frac{4}{n}$.
   (a) **Cas particulier :** dans cette question uniquement on choisit $n = 5$.
   Calculer le volume du troisième cylindre, grisé dans les figures ci-dessous, puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près du volume total de l'ampoule.



Vue dans le plan (BCE) Vue dans l'espace

   (b) **Détermination de la valeur exacte**
   i. Montrer que $\cos^2(x) = \dfrac{1 - 2\cos(2x)}{2}$.
   ii. On admet que le volume du solide de section grisée vaut en réalité $\pi \displaystyle\int_0^4 (f(x))^2 \mathrm{d}x$.
   En déduire le volume réel de l'ampoule. Est-ce cohérent avec la question B)3)a) ? [5]

5. Pour B)3)b)i., exprimer d'abord $\cos(2x)$ en fonction de $\cos^2(x)$ à l'aide des formules de duplication vue en première. Pour la B)3)b)ii., développer puis utiliser la question précédente. On rappelle à toute fin utile que $(sin(u)') = u'cos(u)$.

Remarque 6.4 : Idée générale de l'obtention de volume à partir d'intégrale

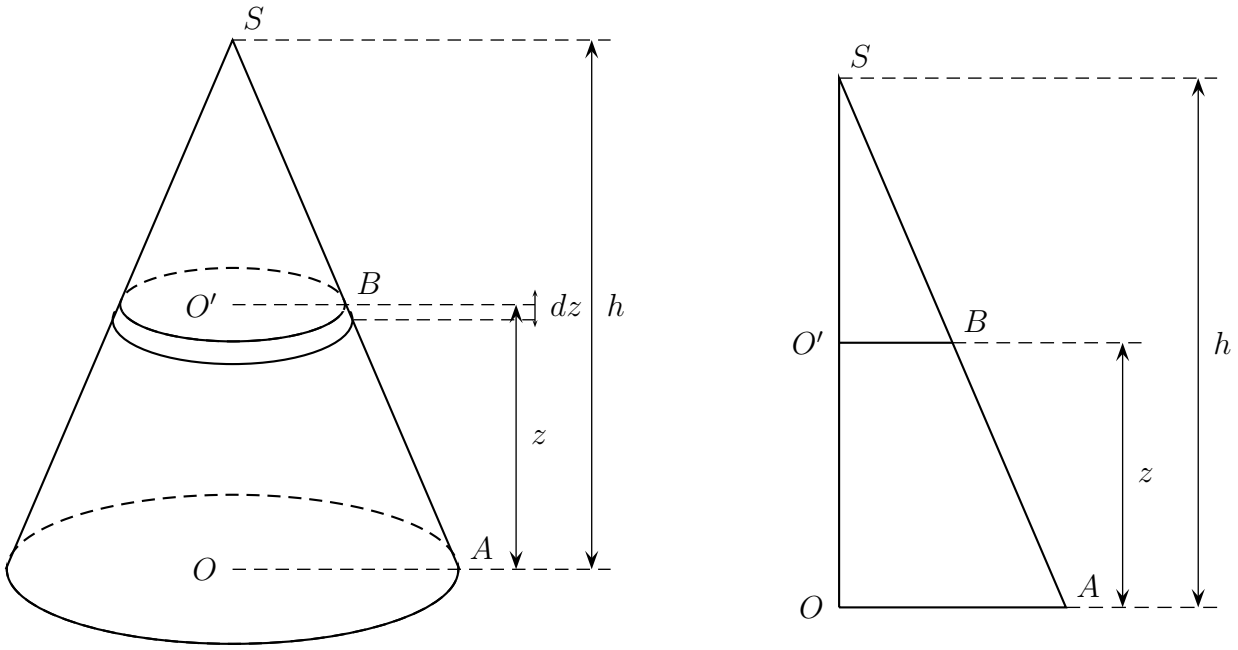
En terminale S, on voit qu'en intégrant on obtient une aire, une donnée numérique en m^2. On obtient cela en intégrant à partir d'une courbe, qui est donc une donnée numérique en m. Il faut à ce stade faire l'analogie avec le fait qu'une primitive de la fonction $x \mapsto x$ est $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$.

Or, une primitive de $x \mapsto x^2$ est $x \mapsto \frac{1}{3}x^3$. Ainsi, en intégrant des m^2, on peut obtenir des m^3 et donc des formules de volume !).

Exercice 6.5 **Formules de volume : cône et pavé droit**

Le cône représenté ci-dessous a une base circulaire de rayon $R = 2$cm et une hauteur $h = 5$cm. On veut calculer son volume à l'aide d'une intégrale. Pour cela on utilise le principe suivant :

- On imagine un découpage de ce cône en "tranches" horizontales infiniment minces dont l'épaisseur sera notée dz.
- On admet que chaque "tranche" ainsi obtenue peut être assimilée à un cylindre.
- On calcule alors la somme des volumes de toutes ces tranches à l'aide d'une intégrale.



1.(a) Chaque tranche a-t-elle le même rayon ?

(b) Le rayon est-il fonction de l'altitude z de cette tranche ?

2. On veut calculer le volume d'une tranche en fonction de z.
Pour cela, on réalise une section du cône suivant un plan parallèle à son axe (figure de droite).
On appelle $r(z)$ le rayon de la tranche située de hauteur z.

(a) Placer $r(z)$ sur le schéma.

(b) Exprimer SO' en fonction de z et en déduire que $r(z) = \frac{2}{5}(5 - z)$.

(c) Exprimer l'aire $S(z)$ de la base de la tranche en fonction de z.

(d) Exprimer son volume en fonction de z.

3.(a) Entre quelles valeurs z varie-t-elle ?

(b) Calculer l'intégrale $\int_0^5 S(z)dz$.

(c) Contrôler le résultat en utilisant la formule connue pour le volume d'un cône.

4. Reprendre la démarche dans le cas général d'un cône de rayon R et de hauteur h.

5. Reprendre la démarche pour un parallélépipède rectangle de dimension L, l et h.

Exercice 6.6 **Volume d'un solide de révolution**

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ de $\mathbf{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On peut placer la courbe dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, puis faire "tourner" la courbe autour de l'axe $(0;\vec{\imath})$. On définit ainsi un solide de révolution (telle la sphère ou le cylindre par exemple).

Partie A : Une formule générale

1. Faire une figure illustrant la situation.
2. À chaque valeur de x dans l'intervalle $[a;b]$ correspond un disque, intersection du solide avec le plan parallèle à $(0;\vec{\jmath},\vec{k})$ passant par cette valeur de x. Préciser le rayon puis l'aire de ce disque.
3. Le volume du solide de révolution ainsi construit est donné par l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \pi[f(x)]^2\mathrm{d}x$. Expliquer cette formule.

Partie B : Quelques calculs de volumes

1.(a) Quelle est la nature du solide de révolution S_1 défini sur l'intervalle $[0;5]$ par la fonction constante $f_1 : x \mapsto 2$? On pourra s'aider d'un schéma.

(b) Calculer le volume du solide S_1.

2.(a) Quelle est la nature du solide de révolution S_2 défini sur l'intervalle $[0;5]$ par la fonction linéaire $f_2 : x \mapsto x$?

(b) Calculer le volume du solide S_2.

3.(a) Quelle est la nature du solide de révolution S_3 défini sur l'intervalle $[0;5]$ par la fonction affine $f_3 : x \mapsto 2x+1$?

(b) Calculer le volume du solide S_3.

4.(a) Quelle est la nature du solide de révolution S_4 défini sur l'intervalle $[0;1]$ par la fonction $f_4 : x \mapsto \sqrt{1-(x-1)^2}$?

(b) Calculer le volume du solide S_4.

5. Calculer le volume du solide de révolution obtenu à partir de la fonction $f_5 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}\ln x$ sur l'intervalle $[1;e]$.

6.3 Intégration par changement de variable

Exemple 6.5

Pour déterminer une primitive d'une fonction, il est parfois nécessaire de passer par un changement de variable. C'est ce que présente cet exercice, pas à pas.

Partie A : Préliminaires

On peut montrer que pour tout réel u différent de -1 et 1, $\dfrac{1}{(1-u)(1+u)} = \dfrac{0,5}{1-u} + \dfrac{0,5}{1+u}$.

Partie B : exemple de calcul d'une intégrale

Calculons $I = \displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)}$.

Posons[6] : $u = \cos(x)$. u sera notre nouvelle variable, d'où le terme de **changement de variable**.

On a donc $u' = \cos'(x)x'$, ce qui se note en notation différentielle[7] : $\mathrm{d}u = -sin(x)\mathrm{d}x$, soit encore $-\mathrm{d}u = \sin(x)\mathrm{d}x$.

6. Attention, il faut que le changement de variable soit fait à l'aide d'une fonction bijective, dérivable (idem pour la réciproque), de dérivée continue (idem pour la réciproque) sur l'intervalle d'intégration, ce qui est bien le cas de cosinus sur $[\pi/4;\pi/2]$, qui est strictement monotone sur cet intervalle.

7. "d" signifie dérivée (notation de Leibniz).

De plus, quand $x = \pi/4$, $u = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ et quand $x = \dfrac{\pi}{2}$, $u = cos(\pi/2) = 0$.

Toute l'astuce ici consiste à faire apparaître dans I l'expression $sin(x)\mathrm{d}x$ pour la remplacer par $-\mathrm{d}u$.

Alors, c'est parti : $I = \displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin(x)\mathrm{d}x}{\sin^2(x)}$.

A ce stade, on peut facilement remplacer le numérateur par $-\mathrm{d}u$.

De plus, pour le dénominateur, il suffit d'utiliser le fait que $sin^2 + cos^2 = 1$ pour faire apparaître du $\cos^2(x)$, qui sera remplacé par u^2.

Donc [8] : $I = \displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{-\sin(x)\mathrm{d}x}{1-\cos^2(x)} = \int_{\sqrt{2}/2}^{0} \frac{-\mathrm{d}u}{1-u^2} = -\int_{\sqrt{2}/2}^{0} \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = \int_{0}^{\sqrt{2}/2} \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = \int_{0}^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{(1-u)(1+u)}\mathrm{d}u$
.

Donc : $I = \displaystyle\int_{0}^{\sqrt{2}/2} \frac{0,5}{1-u} + \frac{0,5}{1+u}\mathrm{d}u = [-0,5\ln(1-u) + 0,5\ln(1+u)]_0^{\sqrt{2}/2} \approx 0,9$.

Exercice 6.7 **À votre tour !**

1.(a) Montrer que pour tout réel u différent de -1 et 1, $\dfrac{1}{(1-u)(1+u)} = \dfrac{0,5}{1-u} + \dfrac{0,5}{1+u}$.

(b) Calculer $I = \displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)}$, en posant $u = \cos(x)$ (oui, c'est l'exemple, à refaire par vous-même donc).

2. Calculer $J = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\mathrm{d}x}{\cos(x)}$ (poser $u = \sin(x)$).

3. ▲ Calculer $K = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\mathrm{d}x$ (poser $u = e^x$).

4. ▲ Calculer $L = \displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{\frac{1}{u(u-1)}}\,\mathrm{d}u$ (poser $u = sin^2(t)$).

[9]

8. On peut procéder au changement de variable. Tout ce qui est avec du x est remplacé par l'équivalent avec du u. Il est essentiel de comprendre que u est une variable et pas une fonction de x !

9. Astuce pour K : $\dfrac{1}{u(u+1)} = \dfrac{\cdots}{u} + \dfrac{\cdots}{u+1}$

Chapitre 7

Équations différentielles d'ordre 1

7.1 Mise en bouche

7.1.1 Le circuit RC

Un circuit électrique de base est le circuit RC (résistance-condensateur [1]). C'est un circuit composé d'un générateur, d'une résistance et d'un condensateur montés en série.

Si l'on note :

- t le temps écoulé ;
- $i : t \mapsto i(t)$ l'intensité (en Ampère) du courant traversant le circuit ;
- $u : t \mapsto u(t)$ la tension (en Volt) aux bornes du condensateur [2] ;
- C la capacité du condensateur (en Farad), qui est une valeur fixe ;
- $u' = \dfrac{du}{dt}$ la dérivée de la tension u par rapport au temps ;

alors un condensateur idéal vérifie la relation suivante : $i(t) = C \times u'(t)$, soit, en notation physicienne, $i = C\dfrac{du}{dt}$.

Notons enfin :

- E, la tension (en Volt) émise par le générateur, qui est constante ;
- R, la résistance (en Ohm) du dipôle résistance, également constante.

Regardons maintenant le circuit dans son ensemble. Comme le montage est en série, la tension E émise par le générateur est la somme des tensions [3] aux bornes de la résistance (valant Ri, d'après la loi d'Ohm) et de celle aux bornes du condensateurs (notée u).

D'où $E = Ri + u$ soit $E = RC\dfrac{du}{dt} + u$, ou encore en notation mathématiques :

$$E = RCu'(t) + u(t).$$

Une telle équation, mêlant une fonction et sa dérivée, d'inconnue la fonction, est appelée **équation différentielle.**

1. "Le condensateur est un composant électronique élémentaire, constitué de deux armatures conductrices (appelées « électrodes ») en influence totale et séparées par un isolant polarisable (ou « diélectrique »). Sa propriété principale est de pouvoir stocker des charges électriques" (selon Wikipédia). C'est un grand classique, que l'on retrouve dans l'ensemble des appareils électroniques de nos jours.
2. Attention, ici, u et i sont des fonctions dérivables exprimées en fonction de x.
3. D'après la loi des mailles, ou loi d'additivité des tensions. La tension générée par le générateur est égal à la somme des tensions aux bornes des dipôles d'un circuit monté en série.

7.1.2 Une première équation différentielle

Exercice 7.1 **une première résolution**

1. Rappeler quelle est l'unique fonction y solution de l'équation différentielle $y' = y$, vérifiant $y(0) = 1$.
2. Déterminer une autre fonction solution de l'équation $y' = y$.
3. Vérifier que $f : x \mapsto e^{2x}$ est une (en réalité, "la") solution de l'équation différentielle $y' = 2y$ telle que $y(0) = 1$.
4. Déterminer une solution g de l'équation différentielle $y' = 2y$ telle que $y(0) = 3$.
5. Déterminer une solution h de l'équation différentielle $y' = 2y + 3$.

[4]

7.2 Résolution de l'équation homogène, aussi appelée équation sans second membre, $y' = ay$

On cherche à résoudre dans cette partie les équations de la forme $y' - ay = 0$, où y est une fonction dérivable de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et où a est une constante différente de 0.

Théorème 7.1

Soit a un réel non nul. L'ensemble des solutions sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants sans second membre[5] *(H) : $y' - ay = 0$, ce qui se note aussi : $\boxed{(H) : y' = ay}$, est l'ensemble des fonctions de la forme $\boxed{f : x \mapsto ce^{ax}}$, où c est une constante.*

Exercice 7.2 **Démonstration**

1. Montrer que $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto ce^{ax}$ est solution de (H), c'est à dire que pour tout réel x, $f'(x) - af(x) = 0$.
2. Réciproquement, le but de cette question est de montrer que toute solution f de (H) s'écrit sous la forme $f : x \mapsto ce^{ax}$.
   (a) Soit f une solution de (H) et soit $\phi : x \mapsto f(x)e^{-ax}$. Montrer que ϕ est constante.
   (b) Conclure.

[6]

Remarque 7.2

- Une autre démonstration possible (après avoir vu le logarithme népérien) est la suivante :

f solution de $(H) \Leftrightarrow f'(x) = af(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbf{R}, \dfrac{f'(x)}{f(x)} = a \Leftrightarrow$ [7]
$\forall x \in \mathbf{R}, \ln(|f(x)|) = ax + b \Leftrightarrow \forall x \in \mathbf{R}, |f(x)| = e^{ax+b} = e^b e^{ax} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbf{R}, f(x) = ce^{ax}$, où $c = e^b$ ou $c = -e^b$.

- Il y a donc une infinité de solutions à une équation homogène, tout comme une fonction continue sur un intervalle admet une infinité de primitives sur cet intervalle.

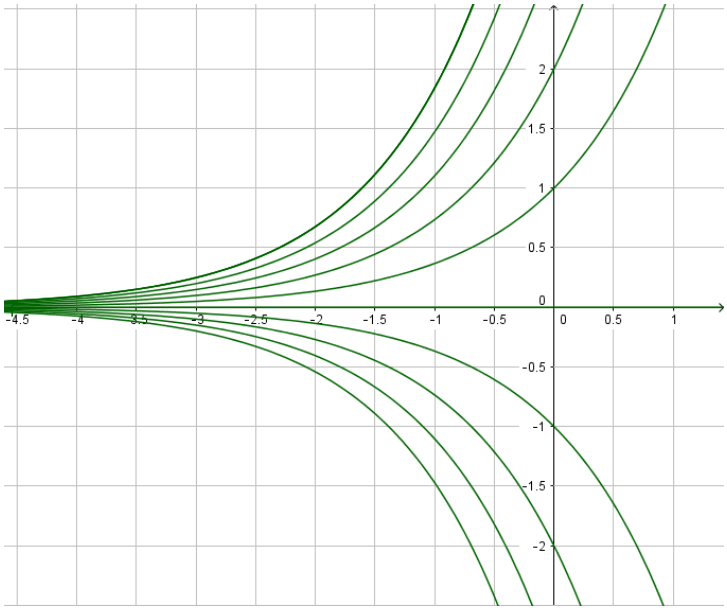
Théorème 7.3 : de Cauchy-Lipschitz [8]

On se place dans le cadre du théorème précédent. Pour tout $(x_0; y_0) \in \mathbf{R}^2$, il existe une unique fonction f solution de (H) telle que $f(x_0) = y_0$.

4. La question 2 reprend la même équation que la question 1, mais sans imposer la condition initiale $y(0) = 1$.
5. Différentielle car lie la fonction à sa dérivée ; linéaire car la forme fait penser aux fonctions linéaires $y = ax$; d'ordre 1 car la dérivée est d'ordre 1 ; à coefficients constants car a est constant ; sans second membre car le membre de droite dans l'équation vaut 0.
6. Remarque pour la question 2 : il s'agit de montrer que f est solution de (H) si et seulement si f s'écrit sous la forme $f : x \mapsto ce^{ax}$. On a démontré le sens indirect : il reste donc à démontrer le sens direct.
7. En primitivant.
8. Augustin Louis Cauchy, mathématicien français du début du 18ème siècle ; Rudolph Otto Sigismund Lipschitz, mathématicien allemand de la fin du 18ème siècle.

Illustration 7.4 : : courbes de plusieurs fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = y$

On remarque en particulier que, pour tout couple $(x_0; y_0) \in \mathbf{R}^2$, il existe une seule courbe passant par le point de coordonnées $(x_0; y_0)$.



Remarque 7.5

- C'est ce que l'on appelle en particulier la condition initiale (quand $x_0 = 0$) ou finale (quand on connaît la limite en $+\infty$).
- On peut faire le rapprochement de cette unicité avec la condition d'unicité de la primitive.

Exercice 7.3 **Démonstration**

Montrer le théorème, c'est à dire montrer qu'il existe un unique $c \in \mathbf{R}$ correspondant à $f(x_0) = y_0$.

Exemple 7.6

On souhaite déterminer la fonction f solution de l'équation $y' = -2y$, avec $f(1) = -3$.
D'après le théorème 5.1, il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $f : x \mapsto ce^{-2x}$.
Or : $f(1) = -3 \Leftrightarrow ce^{-2} = -3 \Leftrightarrow c = \dfrac{-3}{e^{-2}} = -3e^2$.
D'où : $f : x \mapsto -3e^2e^{-2x}$.

Exercice 7.4 **Premières vraies résolutions**

1.(a) Résoudre dans $\mathbf{R}$ $(H_1) : y' = 3y$.
   (b) Déterminer l'unique fonction f solution de (H_1) telle que $f(0) = 5$.
2. Déterminer l'unique fonction g solution de $(H_2) : 2y' - 7y = 0$ telle que la courbe de représentative de g admette une tangente de coefficient directeur 42 au point d'abscisse $x = 0$.

[9]

7.3 Résolution de l'équation linéaire d'ordre 1 à coefficients constants $y' = ay + b$

Théorème 7.7

On considère a et b deux réels, $a \neq 0$. On cherche à résoudre $(E) : y' = ay + b$

1. *Il existe une solution particulière constante*[10] *à l'équation (E) : $f_0 : x \mapsto \dfrac{-b}{a}$.*
2. *L'ensemble des solutions de (E) est obtenu en ajoutant à une solution particulière de (E) une solution quelconque de l'équation sans second membre $(H) : y' = ay$. Ainsi, si ϕ est une solution de (E), elle est de la forme $\phi : x \mapsto f_0(x) + ce^{ax}$, où $c \in \mathbf{R}$.*

9. Résoudre signifie déterminer l'ensemble des solutions.
10. Cette solution est à retrouver à chaque fois plutôt qu'à apprendre par coeur.

Exercice 7.5 **Démonstration**

1. Montrer le premier point.
2. (a) Montrer que si ϕ est solution de (E), alors $f = \phi - f_0$ est solution de (H).
   (b) Conclure quant au deuxième point.

Exemple 7.8 : *: résolution de l'équation* (E) *:* $y' - 6y = 4$.

$\star$ Cherchons une fonction f_0 constante solution de (E). On a particulier $f_0'(x) = 0$ pour tout réel x.

Comme f_0 est solution de (E),f_0 vérifie alors $0 - 6f_0 = 4$ soit : $\forall x \in \mathbf{R}$, $f_0(x) = \dfrac{4}{-6} = \dfrac{-2}{3}$.

$\star$ Résolvons l'équation $y' - 6y = 0$ (l'équation homogène (H) associée à notre équation de départ).

L'ensemble des solutions à cette dernière est l'ensemble des fonctions $f : x \mapsto ce^{6x}$, $c \in \mathbf{R}$.

$\star$ Les solutions de l'équation (E) sont donc de la forme $\phi : x \mapsto -\dfrac{2}{3} + ce^{6x}$.

Exercice 7.6

Refaire l'exemple précédent cahier fermé.

Théorème 7.9 : **Théorème de Cauchy-Lipschitz**

On se place dans les conditions du théorème précédent. Si de plus on veut $f(x_0) = y_0$*, où* $(x_0; y_0) \in \mathbf{R}^2$*, alors il existe une unique fonction* f *solution de* (E) *vérifiant cette condition.*

Exercice 7.7 **Démonstration**

Démontrer le théorème précédent.

Exercice 7.8 **Résolution en autonomie**

Déterminer l'unique solution ϕ de (E_3) : $y' = 3y - 6$ vérifiant $\phi(2) = 1$.

7.4 Exercices

Exercice 7.9 **D'après Antilles Guyane (série STI2D)**

On étudie la charge d'un condensateur et l'on dispose pour cela d'un circuit électrique composé :

- d'une source de tension continue E de 10V ;
- d'une résistance R de $10^5\Omega$;
- d'un condensateur de capacité C de $10^{-6}F$.

On note u la tension exprimée en volt aux bornes du condensateur, qui est une fonction du temps t exprimé en seconde. Comme nous l'avons vu au début du chapitre, la fonction u est définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ et vérifie l'équation différentielle suivante : $RCu' + u = E$.

1. Justifier que l'équation différentielle est équivalente à $u' + 10u = 100$.
2. On considère qu'à l'instant $t = 0$, le condensateur est déchargé, c'est à dire que $u(0) = 0$. Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle vérifiant cette égalité.
3. Déterminer, en justifiant, les variations sur $[0; +\infty[$ et la limite en $+\infty$ de la fonction u déterminée à la question précédente. Comment peut-on interpréter ces résultats ?
4. On note T le temps de charge en seconde telle que $u(T)$ soit égal à 95% de E. Déterminer T à 10^{-1} près.
5. Sans modifier les valeurs respectives de E et de C, déterminer la valeur de la résistance, notée $\tilde{R}$, afin que le temps de charge T soit multiplié par 2.

Exercice 7.10 Datation au carbone 14, d'après "Les maths au quotidien"

Le bois vivant contient toujours une certaine proportion de carbone 14, constante à travers le monde. Lorsque l'arbre est abattu, cette proportion décroît progressivement. En connaissant cette décroissance, en observant la proportion de carbone 14 à un instant t dans du bois, on peut alors estimer depuis combien de temps il a été abattu et donc déterminer globalement son époque d'origine.
On admet que, pour de la matière organique, la quantité $N(t)$ d'atomes de carbone 14 en fonction du temps $t \in [0; +\infty[$ exprimée en années vérifie l'équation différentielle :

$$N'(t) = -1,2097 \times 10^{-4} N(t).$$

1. En notant N_0 la quantité d'atomes carbone 14 initiale, déterminer $N(t)$ en fonction de t.
2. En déduire qu'au bout de 10 000 ans, il reste environ 30% des atomes initiaux.
3. On appelle demi-vie, notée $T_{1/2}$, du carbone 14 le temps au bout duquel la moitié des atomes se sont désintégrés.
   Déterminer à 10 ans près la demi-vie du carbone 14.
4. On analyse des os trouvés dans une grotte. On constate qu'ils ont perdus 95% de leur carbone 14. Quel est l'âge T des os, à 100 ans près ?

Exercice 7.11 D'après Polynésie - Juin 2013 (série STI2D)

La grand-mère de Théo sort un gratin du four, le plat étant alors à $100C$. Elle conseille à son petit-fils de ne pas le toucher afin de ne pas se brûler, et de laisser le plat se refroidir dans la cuisine dont la température ambiante est supposée constante à $20C$.
Théo lui rétorque que quand il sera à $37C$ il pourra le toucher sans risque ; et sa grand-mère lui répond qu'il lui faudra attendre 30 minutes pour cela.
La température du plat est donnée par une fonction g du temps t, exprimé en minutes, qui est solution de l'équation différentielle : $(E) y' + 0,04y = 0,8$.

1. La grand-mère de Théo a-t-elle bien évalué le temps nécessaire pour atteindre $37C$?
2. Quelle est la valeur exacte du temps nécessaire pour obtenir cette température ? En donner une valeur arrondie à la seconde près.
3. Quelle est la température de la cuisine ?

Exercice 7.12 Circuit RL

Un autre grand classique des circuits électriques est le circuit dit RL (résistance-bobine et bien sûr générateur).
Tout comme le condensateur a une capacité C, la bobine a une inductance L, qui s'exprime en henry (H) et qui vérifie : $u = L\dfrac{di}{dt}$, où i est l'intensité aux bornes de la bobine et u la tension aux bornes de celle-ci.

1. En vous inspirant de l'exemple d'introduction, démontrer que l'équation différentielle vérifiée par un circuit RL est : $i'(t) + \dfrac{R}{L} i(t) = \dfrac{E}{L}$, où E est la tension émise par le générateur et R la valeur de la résistance.
2. A l'instant $t = 0$, l'intensité du courant traversant la bobine est nulle. En déduire l'expression de i en fonction de E, R et L.

Exercice 7.13 Second membre du type "exponentiel-polynôme" ▲

On cherche à résoudre l'équation différentielle $(E) : y' = 3y + (3x^2 + 1)e^{2x}$.
La différence principale avec les autres équations différentielles est donc que le terme en plus entre l'équation homogène et l'équation de base n'est pas une constante, mais bien une fonction !

1. Déterminer a, b, c tels que $f_0 : x \mapsto e^{2x}(ax^2 + bx + c)$ soit une solution particulière de (E).
2. En s'inspirant de l'exercice 5.5, déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Exercice 7.14 **Résolution d'une équation différentielle par changement de fonction ▲**

Soit l'équation différentielle $(E) : y' = 2y - 3y^2$. Le but de l'exercice est de déterminer la solution u de E sur $\mathbf{R}$, ne s'annulant pas et vérifiant la condition initiale $u(0) = 1/4$.

1. Soit $w : x \mapsto \dfrac{1}{u(x)}$. Vérifier que w est définie et dérivable sur $\mathbf{R}$.
2. Montrer que u est solution de (E) si et seulement si w est solution de $(F) : y' = 3 - 2y$.
3. Résoudre (F) puis en déduire l'expression de u.

Exercice 7.15 **D'après Polynésie - Avril 2006 (série S)▲**

A faire après avoir vu le logarithme népérien
Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition. En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à mille. Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de l'origine 2000).
D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0\ ;\ +\infty[$, et satisfait l'équation différentielle : (E) $\quad y' = -\dfrac{1}{20}y(3 - \ln y)$.

1. Démontrer l'équivalence suivante : Une fonction f, dérivable, strictement positive sur $[0\ ;\ +\infty[$, vérifie, pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$, $f'(t) = -\dfrac{1}{20}f(t)[3 - \ln(f(t))]$ si et seulement si la fonction $g = \ln(f)$ vérifie, pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[, g'(t) = \dfrac{1}{20}g(t) - \dfrac{3}{20}$.
2. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle : (F) $\quad z' = \dfrac{1}{20}z - \dfrac{3}{20}$.
3. En déduire qu'il existe un réel c tel que, pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$ $f(t) = \exp\left[3 + c\exp\left(\dfrac{t}{20}\right)\right]$.
   (la notation exp désigne la fonction exponentielle naturelle $x \mapsto \mathrm{e}^x$).
4. La condition initiale conduit donc à considérer la fonction f définie par : $f(t) = \exp\left[3 - 3\exp\left(\dfrac{t}{20}\right)\right]$.
   (a) Justifier la phrase précédente.
   (b) Déterminer le sens de variation de f sur $[0\ ;\ +\infty[$. Comment peut-on interpréter ce résultat ?
   (c) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Comment peut-on interpréter ce résultat ?
   (d) Résoudre dans $[0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $f(t) < 0,02$. Comment peut-on interpréter ce résultat ?

7.5 Un mot sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2

On s'intéresse dans cette section (qui est en réalité l'exercice 7.16 ▲) aux équations différentielles linéaires d'ordre 2, c'est à dire aux équations différentielles de la forme $ay'' + by' + cy = d$, où y'' est la dérivée seconde de y, c'est à dire est la dérivée de y'. On admettra pour la partie C que comme pour les équations différentielles du premier ordre, l'ensemble des solutions de ce type d'équations s'écrit comme la somme d'une solution particulière et de la solution de l'équation homogène associée.

Partie A : Résolution de l'équation homogène associée

Soit (H) l'équation différentielle : $ay'' + by' + cy = 0$, où a, b, c, sont trois réels, $a \neq 0$.
On cherche les valeurs possibles de $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $f : x \mapsto e^{\lambda x}$ soit solution de (H).

1. Montrer que f est solution de (H) si et seulement si λ est solution de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ (appelée **équation caractéristique** associée à (H)).
2. On note Δ le discriminant associé au polynôme $ax^2 + bx + c$.
   (a) Dans cette question uniquement, on suppose que $\Delta > 0$. Que peut valoir λ ?

Point info
Dans ce cas, f est solution de (E) si et seulement si f est de la forme $f : x \mapsto C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, où C_1 et C_2 sont des constantes à déterminer à l'aide des conditions initiales et λ_1 et λ_2 les racines déterminées précédemment. Deux solutions à l'équation caractéristique implique qu'il faut exprimer f en fonction de deux fonctions.

(b) Dans cette question uniquement, on suppose que $\Delta = 0$. Que peut valoir λ ?

Point info
Dans ce cas, f est solution de (E) si et seulement si f est de la forme $f : x \mapsto (C_1 x + C_2)e^{\lambda x}$ où C_1 et C_2 sont des constantes à déterminer à l'aide des conditions initiales.

(c) Dans cette question uniquement, on suppose que $\Delta < 0$. Que peut valoir λ ?

Point info
Dans ce cas, f est solution de (E) si et seulement si f est de la forme $f : x \mapsto C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, où C_1 et C_2 sont des constantes à déterminer à l'aide des conditions initiales et λ_1 et λ_2 les racines complexes déterminées précédemment. On obtient une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ mais dont les images sont a priori complexes : cool, hein ? Par combinaison, le lecteur curieux et conquérant pourra montrer que f s'écrit alors $f : x \mapsto e^{Re(\lambda_1)x}[A\cos(Im(\lambda_1)x) + B\sin(Im(\lambda_1)x)] = qe^{Re(\lambda_1)x}cos(Im(\lambda_1)x + r)$, ce qui est bien une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ (avec A, B, q, r des réels fixés à déterminer via les conditions initiales). Ouf !

Partie B : Un premier exemple d'après Polynésie - juin 1998 (série S)

1. Déterminer [11] les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ solutions de l'équation différentielle (E_1) : $y'' + 2y' + y = 0$.
2. On considère l'équation différentielle (E_2) : $y'' + 2y' + y = x + 3$.
   (a) Vérifier que la fonction p définie sur $\mathbf{R}$ par $p(x) = x + 1$ est une solution particulière de (E_2).
   (b) Démontrer qu'une fonction g est solution de (E_2) si, et seulement si, la fonction $g - p$ est solution de (E_1).
   (c) Déduire de **1.** et **2.(b)** les solutions de (E_2)
   (d) Déterminer la solution générale de (E_2) qui vérifie : $g(0) = 1$ et $g'(0) = 2$.

Partie C : application au circuit RLC

La lectrice [12] attentive depuis le début du chapitre aura compris qu'un circuit RLC est composé d'une résistance, d'une bobine et d'un condensateur.

Dans cette partie, nous supposerons avoir affaire à un montage en série.

Enfin, nous noterons :

- E la tension générée par le générateur ;
- u la tension aux bornes du condensateur ;
- C la capacité du condensateur
- i l'intensité traversant le circuit ;
- L l'inductance de la bobine
- R la valeur de la résistance.

1. En vous inspirant ce qui a été fait précédemment pour les circuits RC et RL dans ce chapitre, démontrer que la tension aux bornes du condensateur est solution de l'équation différentielle suivante :

$$(E) : LCy'' + RCy' + y = E.$$

11. Pour cette question, il faut commencer par résoudre l'équation caractéristique associée à (H). Suivant Δ, on peut alors conclure.
12. Parité !

2. On suppose désormais que $L = 2H$, $C = 0,1\mu F$, $E = 10V$ et $R = 10k\Omega$.
   Par ailleurs, nous supposerons que le condensateur a été préalablement chargé par le générateur, que le générateur est coupé à $t = 0$ et que nous étudions ce qu'il se passe lorsque le condensateur se décharge dans la bobine et dans la résistance ("régime libre").
   L'équation différentielle devient alors :

$$(H) : LCy'' + RCy' + y = 0.$$

   (a) Montrer que (H) peut s'écrire : $2y'' + 10^4y' + 10^7y = 0$ puis la résoudre.
   (b) Avec les notations de la partie A, f est donc solution de (E) si et seulement si f s'écrit sous la forme $f : x \mapsto C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$.
   Il reste à déterminer C_1 et C_2. Or, les conditions initiales nous assurent que : $u(0) = E$ (le condensateur étant chargé) et que $i(0) = 0$ (la bobine n'ayant pas encore "transmis" de courant).
      i. On rappelle que $i = Cu'$. Déduire des conditions initiales que C_1 et C_2 vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 & = & 10 \\ \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 & = & 0 \end{cases}$$

      ii. En déduire l'expression de u en fonction du temps [13]. Quelle est sa limite ? Comment peut-on interpréter ce résultat ?

13. Dans cette configuration, on parle de régime apériodique libre. Le lecteur curieux pourra consulter par exemple le lien suivant pour les autres régimes possibles concernant le circuit RLC : `http://www.physagreg.fr/electrocinetique/ec3/EC3-rlc-serie.pdf`

Chapitre 8

Espace vectoriel

Sans être obligatoire, il est conseillé d'avoir vu le chapitre sur les structures algébriques. Cela permettra de mieux appréhender les notions de sommes, produits, éléments neutres vus ici.

8.1 Un exemple d'introduction

• Le plan $\mathcal{P}$ est un ensemble de points générés par deux vecteurs non colinéaires. C'est ce qu'on appelle un **espace vectoriel de dimension 2.** [1]

• Notons $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ces deux vecteurs et O le point origine du plan. On parle alors de repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

• Notons A l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\vec{i}$, c'est à dire l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de coordonnées $(k; 0)$, où $k \in \mathbf{R}$.

A est le **sous-espace vectoriel** du plan **généré** par $\vec{i}$: on le note $vect(\vec{i})$.

Géométriquement, A correspond à l'axe des abscisses dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

• Si $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, alors $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Ainsi, tout vecteur peut s'écrire comme **somme** (directe) suivant les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

On dit alors que $(\vec{i}, \vec{j})$ est une **base** du plan et on note $\mathcal{P} = vect(\vec{i}) \oplus vect(\vec{j})$.

• Sur un modèle analogue, l'espace peut être modélisé à partir d'un espace vectoriel de dimension 3.

8.2 K-espace vectoriel

Définition 8.1

Un ensemble E, muni d'une somme "+" et d'une multiplication "." par un nombre d'un corps [2] $\mathbf{K}$ (généralement, le corps des réels $\mathbf{R}$ ou des complexes $\mathbf{C}$), est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

On note $(E, +, \lambda.x)$.

Exemple 8.2

$\mathbf{C}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

En effet, soit z et z' deux nombres complexes.

Alors :

• $0 \in \mathbf{C}$, $z + z' = z' + z$ et $z - z' \in \mathbf{C}$ (c'est l'aspect "on munit $\mathbf{C}$ d'une somme" : c'est commutatif, il y a un élément neutre 0, tous les éléments ont un opposé).

• Pour tout réels k et k', $(k + k').z = k.z + k'.z$, $k.(z + z') = k.z + k.z'$, $(k.k').z = k.(k'.z)$ et $1_{\mathbf{R}}.z = z$ (c'est l'aspect "multiplication par un nombre d'un corps $\mathbf{K}$", ici $\mathbf{R}$: on peut multiplier, distribuer, et il y a un élément de $\mathbf{R}$ qui ne modifie aucun élément de $\mathbf{C}$ en le multipliant, à savoir l'élément neutre 1).

Remarque 8.3

Si on reprend l'exemple des vecteurs, on raconte simplement que : qu'il y a un vecteur nul ; que l'on peut faire $\vec{u} + \vec{v}$ ou $\vec{v} + \vec{u}$, c'est pareil ; que la différence de vecteurs du plan est un vecteur du plan ; qu'en multipliant un vecteur par un réel (soit multiplication simple, soit en distribuant) on obtient un autre vecteur.

1. Vectoriel car c'est un ensemble généré par des vecteurs ; de dimension 2 car on a besoin de deux vecteurs pour générer le plan.
2. Voir le chapitre : "Quelques structures algébriques usuelles". Ici, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, c'est ce qu'il faut retenir.

Exercice 8.1 **Autres exemples**

1. Montrer que $\mathbf{R}$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel. $\mathbf{Q}$ est-il un $\mathbf{R}$-espace vectoriel ?
2. Montrer que $\mathbf{R}^2$, l'ensemble des vecteurs à 2 coordonnées (donc les vecteurs du plan), est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
3. Soit $n \in \mathbf{N}$. On note $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times ... \times \mathbf{R}$ l'ensemble des vecteurs à n coordonnées réelles. Montrer que $\mathbf{R}^n$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
4. Justifier que l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

Remarques 8.4

- Ainsi, les additions et les multiplications se comportent de manière naturelle. C'est simplement ce qu'il faut retenir.
- On remarque donc que l'on peut considérer les fonctions dérivables comme des éléments d'un espace vectoriel, donc comme des vecteurs. Pensez-y ! Cela est une sacrée généralisation des vecteurs, les murs entre les domaines des mathématiques s'effondrent comme les murs de Jéricho devant vos yeux ébahis.
  Oui, le mathématicien aime regrouper les éléments par classe d'objets (groupe, anneaux, corps, espace-vectoriel...) pour ensuite étudier ces classes. Pourquoi ? Parce que c'est fun, tout simplement.
  Et beau.
  Et on n'explique pas la beauté, on se contente de la savourer.
  Fin de la digression [3].

8.3 Sous-espace vectoriel

Définition 8.5

Soit A une partie incluse dans E, où $(E, +, \lambda.x)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Si A est lui-même un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, A est un alors un **$\mathbf{K}$-sous-espace vectoriel** de E.

Remarque 8.6

On notera désormais : "ev" pour "espace vectoriel" et "sev" pour "sous-espace vectoriel".

Exemple 8.7

$\mathbf{C}$ est un $\mathbf{Q}$-ev ; $\mathbf{R}$ est un $\mathbf{Q}$-ev ; $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.
Donc : $\mathbf{R}$ est un $\mathbf{Q}$ sev de $\mathbf{C}$.

Théorème 8.8 : **: caractérisation des sous-espace vectoriels**

Soit A une partie de E. Alors :
A est un sev de E
$\Leftrightarrow A \neq \emptyset$ et $\forall (a, b) \in A^2, \forall \lambda \in K : a + b \in A$ et $\lambda.a \in A$;
$\Leftrightarrow A \neq \emptyset$ et $\forall (a, b) \in A^2, \forall (\lambda, \mu) \in K^2 : \lambda.a + \mu.b \in A$.

Démonstration

On va l'admettre ici : il faudrait définir proprement les ev à partir de la notion de groupe. Mais si vous voulez essayer, ne vous privez pas : le démonstration a des similitudes avec celle du théorème caractérisant les sous-groupes.

Remarque 8.9

Ainsi, pour montrer que A est un sev de E, il suffit de vérifier que $A \subset E$, que $A \neq 0$ (en général, $0_E \in A$) et que pour $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$ et $(a, b) \in A^2, \lambda a + \mu b \in A$.

Exemple 8.10

Comme $\mathbf{C}$ est un un $\mathbf{R}$-ev, $\mathbf{R}$ est un $\mathbf{R}$-sev de $\mathbf{C}$.
En effet, en référence au théorème précédent, on a ici : $A = \mathbf{R}$, $E = \mathbf{C}$ et $K = \mathbf{R}$. Remarquons que $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.
Or : $\mathbf{R} \neq \emptyset$ (puisque $0 \in \mathbf{R}$) et : $\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 : \lambda.a + \mu.b \in \mathbf{R}$

3. Oui, on dit digression et non pas disgression. Je sais, j'ai été surpris aussi.

Exercice 8.2 **Avec les fonctions**

Montrer que l'ensemble D des fonctions dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est un $\mathbf{R}$-sev de l'ensemble C des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

Exercice 8.3 **Intersection et sev engendré**

Soit E un $\mathbf{K}-$espace vectoriel.

1. Montrer que tout sev E contient 0_E.
2. Soit A et B deux sev de E. Montrer que $A \cap B$ est un sev de E.
3. Soit n un entier naturel non nul et soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de sev de E (ainsi, chaque A_i, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, est un sev de E).
   Montrer que $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} A_i$ est un sev de E.
4. ▲ Soit $A \subset E$. On note **vect(A)** le **sous-espace vectoriel engendré par A**.
   Dit autrement, c'est l'intersection des sev de E contenant A.
   Montrer $vect(A)$ est le plus petit sev de E contenant A.

[4]

Illustration 8.11

Si $(x_1, ..., x_n)$ est une famille de vecteurs de E, $vect(x_1, ..., x_n)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $(x_1, ..., x_n)$.

Dit autrement, $X \in vect(x_1, ..., x_n) \Leftrightarrow X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, où les λ_i sont des éléments de K.

Par exemple, $vect(x_1)$ est l'ensemble des vecteurs colinéaires à x_1. La notation vient sûrement de là !

8.4 Application linéaire

On considère dans toute cette partie $(E, +, \lambda.x)$ et $(F, +, \lambda.y)$ deux $\mathbf{K}$-ev.

Remarque 8.12

Pour cette partie, il est préférable (en fait, très rapidement indispensable) d'avoir travaillé les notions d'injectivité et de surjectivité (dans le chapitre 3).

8.4.1 Endo, iso and co

Définitions 8.13

- $f : E \to F$ est une **application linéaire** de E vers F (on note $f \in \mathcal{L}(E, F)$) lorsque :
$$\forall (x, y) \in E^2, \forall (a, b) \in K^2, f(ax + by) = af(x) + bf(y).$$
- Si $f : E \to E$, f est appelé **endomorphisme**.
- $f : E \to F$ est appelé **isomorphisme** si f est linéaire et si f est bijective (i.e. injective et surjective [5]).

On parle d'**automorphisme** quand f est à la fois un endomorphisme et un isomorphisme.

Exemple 8.14

Les fonctions linéaires découvertes au collège sont des exemples d'applications linéaires.

Exercice 8.4 **exemple précédent à démontrer et un bonus**

1. Soit $a \in \mathbf{R}$ et $f_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto ax$. Montrer que f_a est un endomorphisme. f_a est-elle un automorphisme ?
2. Montrer que $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, X = (x, y) \mapsto x + y$ est une application linéaire. Pourquoi ne peut-on pas parler d'endomorphisme ici ?

[6]

4. i.e pour tout i entier dans $[1; n]$, A_i est un sev de E.
5. Voir chapitre fonction de références.
6. Attention, à la deuxième question de la question 1, la réponse n'est pas que oui ! Par ailleurs, pour la question 2, il faut comprendre qu'à un vecteur X du plan de coordonnées $(x; y)$, on associe la somme $x + y$ de ses coordonnées. Dit autrement : $\forall X \in \mathbf{R}^2, X = (x; y) : g(X) = x + y$.

8.4.2 Noyau et image

Définition 8.15
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
Son noyau, noté **ker(f)**, est l'ensemble[7] des $x \in E$ tels que $f(x) = 0_F$ (*on peut en quelque sorte voir cela comme l'ensemble des antécédents de* 0 *par* f).
Son image, noté **Im(f)**, est l'ensemble des valeurs prises par $f(x)$, où $x \in E$.

Exemple 8.16
Si $f : x \mapsto 3x$, $\ker(f)= 0$ (en effet, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$) et $Im(f) = \mathbf{R}$.
Pour $g : (x, y) \mapsto x + y$, $Im(g) = \mathbf{R}$
et $\ker(g)= \{(x; y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ tel que $y = -x\}$ (en effet, pour $X = (x; y)$, $X \in \ker(g) \Leftrightarrow g(X) = 0 \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$).
Ainsi, le noyau de g est la droite d'équation $y = x$. Remarquons que cela correspond à une fonction linéaire vue au collège... C'est dingue !

Remarques 8.17
- On peut d'ores et déjà affirmer que $ker(f)$ est nécessairement non vide.
  En effet, $f(0) = f(0 \times 0) = 0 \times f(0)$ par linéarité.
  Donc $f(0) = 0$ c'est à dire que l'image de 0 par f est 0.
  Donc $0 \in Kef(f)$, et ce pour toute application linéaire.
- En toute rigueur, l'écriture dans le point ci-dessus n'est pas satisfaisante. En effet, lorsque l'on écrit 0, ce 0 peut signifie différentes choses.
  Dans l'exercice 6.4, on considérait par exemple $E = \mathbf{R}^2$ et $F = \mathbf{R}$.
  Dans ce cas, $0_E = (0; 0)$ et$0_F = 0$.
  En toute rigueur, il faudrait donc écrire la justification du point précédent ainsi[8] :
  "$f(0_E) = f(0_K \times 0_E) = 0_K \times f(0_E)$ par linéarité.
  Donc $f(0_E) = 0_F$ c'est à dire que l'image de 0_E par f est 0_F.
  Donc $0_E \in Kef(f)$, et ce pour toute application linéaire."

Exercice 8.5 **La con position**

Soient E, F, G trois $\mathbf{K}-$espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.
Montrer que $Ker(f) \subset Ker(g \circ f)$ et que $Im(gof) \subset Im(g)$. [9]

Remarque 8.18
D'un point de vue raisonnement et compréhension des notations, l'exercice précédent est fondamental. Il est donc impératif de savoir le faire et de le comprendre. Prenez votre temps, ne soyez pas pressé, remplacez les définitions, regardez ce que vous cherchez et la vérité naîtra. Ainsi que la fierté d'avoir réussi.

Théorème fondamental 8.19
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. *Alors :*

1. f *est injective* $\Leftrightarrow$ $ker(f)$=$\{O_E\}$.
2. f *est surjective* $\Leftrightarrow$ $Im(f)$=F.

Remarque tout aussi fondamentale 8.20
Attention à ce théorème qui, fort utile en pratique, a un aspect fallacieux : il n'est vrai que pour les applications linéaires et faux a priori pour les autres fonctions !
Prenons par exemple la fonction exponentielle. Elle est bijective de $\mathbf{R}$ dans $]0; +\infty[$. Elle est donc en particulier injective. Mais ça n'a pas de sens de parler de "noyau" puisqu'elle n'est pas linéaire ! Par ailleurs, remarquons que la fonction exp ne s'annule jamais (donc il n'existe aucun réel x tel que $f(x) = 0$) malgré son injectivité.
Bref, prudence et n'oublions pas le cadre dans lequel nous travaillons, qui est celui des applications **linéaires**.

7. Ker vient de "Kernel" qui en allemand signifie noyau.
8. Pourquoi ne pas l'avoir fait directement alors ? Simplement pour que vous compreniez l'idée globale, sans toutefois vous noyer sous les notations.
9. Rappel : $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$.

Exercice 8.6 **Démonstration**

La deuxième propriété est une conséquence de la définition de la surjectivité. Pour l'autre :

1. Montrer que pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $f(0_E) = 0_F$.
2. Montrer le sens direct.
3. Montrer le sens réciproque (En montrant par exemple que : $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$).

[10]

Exercice 8.7 **Application**

Soit $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}, (x, y) \mapsto 3ix$, où $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{C}$ sont considérés comme deux $\mathbf{R}$-ev et où i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

1. Montrer que $g \in Ł(\mathbf{R}^2, \mathbf{C})$.
2. g est-elle injective ? surjective ?

Proposition 8.21

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$

1. *Si A est un sev de E, alors $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ est un sev de F.* [11]
2. *Si B est un sev de F, alors $f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$ est un sev de E.* [12]

Exercice 8.8 **Démonstration**

A l'aide de la caractérisation des sev (voir théorème 6.8 dans la partie 3 de ce chapitre), démontrer ces deux propositions.

Exercice 8.9 **Application**

Soit $h \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que $\ker(h)$ est un sev de E.

8.5 Sommes des sev

Soit E un $\mathbf{K}$-ev et A, B deux sev de E.

Définitions et notations 8.22

- $A + B = \{x \in E : \exists (a, b) \in A \times B : x = a + b\}$. Dit autrement, la somme des sev A et B est l'ensemble des éléments de E pouvant s'écrire comme la somme d'un élément de A et d'un élément de B.
  - On dit que A et B sont en **somme directe**, et on note $A \oplus B$, quand $A \cap B = \{0_E\}$.
  - A et B sont dit **supplémentaires** lorsque $A \oplus B = E$.

Théorème 8.23

- A et B sont en somme directe si et seulement si pour tout $x \in A + B$, il existe un unique couple $(a, b) \in A \times B$ tel que $x = a + b$.
- A et B sont supplémentaires si et seulement si pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(a, b) \in A \times B$ tel que $x = a + b$.

Démonstration

Admise pour ce cours mais que rien ne vous empêche de la chercher :-)

Remarque 8.24

Comme en témoignera la fin de l'exemple suivant, ce théorème peut constituer un sacré gain de temps !

Exemple 8.25

$A = vect(1; 0)$ et $B = vect(0; 1)$ vérifient $A \oplus B = \mathbf{R}^2$ et sont donc supplémentaires.

$\star$ En effet, soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Alors $(x, y) = x \times (1; 0) + y \times (0; 1)$ donc $(x, y) \in A + B$.

10. Il s'agit d'une égalité d'ensemble, qui se montre bien par une double inclusion. Dit autrement, il faut montrer que que $\ker(f) \subset \{O_E\}$ puis que $\{O_E\} \subset \ker(f)$. Par ailleurs, voir chapitre "fonctions de référence" pour les définitions d'injectif et de surjectif.
11. On note aussi : $f(A) = \{y \in F, \exists x \in A : f(x) = y\}$
12. On note aussi : $f^{-1}(B) = \{x \in E, \exists y \in B : f(x) = y\}$.

Donc : $\mathbf{R}^2 \subset A + B$. Comme $A + B \subset \mathbf{R}^2$, $A + B = \mathbf{R}^2$.

$\star$ Il reste à vérifier que $A \cap B = \{0_{\mathbf{R}^2} = (0;0)\}$.
Comme $A \cap B$ sev de $\mathbf{R}^2$, $(0;0) \in A \cap B$ (voir exercices précédents).

Réciproquement, si $z \in A \cap B$ alors il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $z = (a;0)$ et il existe $b \in \mathbf{R}$ tel que $z = (0;b)$. Ainsi : $(a;0) = (0;b)$. Donc : $a = 0$ et $b = 0$ i.e. $z = (0,0)$.
Donc : $A \cap B \subset \{0_{\mathbf{R}^2}\}$. (Oui, $\{0_{\mathbf{R}^2}\} = \{(0;0)\}$: c'est le même objet noté différemment).
Donc : $A \cap B = \{0_{\mathbf{R}^2}\}$.

$\star$ Conclusion : $A \oplus B = \mathbf{R}^2$.

$\star$ **Variante** Si $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ alors $(x,y) = (x;0) + (0;y)$. Par unicité de la décomposition, $A \oplus B = \mathbf{R}^2$. Fin de la démo : c'est cool, hein ? A noter que c'est l'exemple d'introduction !

Exercice 8.10

Déterminer de même trois sev A, B, C de R^3 tels que $A \oplus B \oplus C = R^3$.

8.6 Exercices

Exercice 8.11 **Un facile pour commencer**

Dans $\mathbf{R}^2$, que peut-on dire de vect(1 ;0) et de vect (2 ;0) ? [13]

Exercice 8.12 **Sur les sev**

Soit G l'ensemble des fonctions constantes de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et F l'ensemble des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ s'annulant en 0. Montrer que F et G sont deux $\mathbf{R}$-sev de l'ensemble des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

Exercice 8.13 **Sur les équations différentielles... Et oui !**

Soit $a \in \mathbf{R}^\star$. On considère l'équation différentielle (H) $y' = ay$.
Montrer que l'ensemble B des solutions de (H) est un $\mathbf{R}$-sev de l'ensemble D des fonctions dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

Exercice 8.14 **Sur les applications linéaires**

1. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto \ln(x^2+1)$.
   (a) f est-elle linéaire ?
   (b) Déterminer les antécédents de 0 par f. f est-elle injective *(Attention, piège !)* ?
2. (a) Montrer que $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2, (x,y,z) \mapsto (2x+y-z, x-y+3z)$ est une application linéaire.
   (b) Déterminer le noyau de g. g est-elle injective ?
3. Soit $h : \mathbf{C} \to \mathbf{R}^2, z = x+iy \mapsto (x;y)$. Montrer que h est un isomorphisme. [14]

Exercice 8.15 **Applications linéaires, noyau, image**

Soient E, F, G trois $\mathbf{K}$-ev, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(E,F)$, $h \in \mathcal{L}(F,G)$.
On note $f+g$ l'application qui à tout élément $x \in E$ associe $f(x)+g(x) \in F$.
Montrer que :

1. $Im(f+g) \subset Im(f) + Im(g)$.
2. $Ker(f) \cap Ker(g) \subset Ker(f+g)$.
3. ▲ $Ker(f) = Ker(h \circ f) \Leftrightarrow Imf \cap Ker(h) = \{0_E\}$.
4. ▲ $Imf + Kerh = F \Leftrightarrow Im(h \circ f) \circ Im(h)$. [15]

13. Enfin, facile... Il faut relativiser, hein ! Facile par rapport aux délicates notions vues dans ce chapitre.
14. Ainsi, la question 3 revient à montrer qu'associer un point à son affixe complexe ou à ses coordonnées réelles est équivalent, ce qui n'est somme toute guère étonnant.
15. La démonstration du sens réciproque de la question 4 est particulièrement délicat. Il faut connaître l'astuce, qui consiste, en milieu de démonstration d'une des inclusions, à écrire y un élément de F comme $y = f(x) + y - f(x)$ et à justifier que $f(x) \in Imf$ et $y - f(x) \in kerh$.

Exercice 8.16 **Sur les espaces en somme directe**

Soit $A = \{(u; w) \in R^2 : 2u - w = 0\}$ et $B = vect(1; 1)$. Le but de l'exercice est de montrer que $A \oplus B = \mathbf{R}^2$.

1. Montrer que A est bien un sev de $\mathbf{R}^2$, comme noyau d'une application linéaire bien choisi.
2. On va faire un raisonnement par analyse synthèse.
   (a) **Analyse**. Supposons que pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $(x, y) = a + b$. Exprimer alors a et b en fonction de x et y.
   (b) **Synthèse**. Montrer, en utilisant la question précédente, que $A + B = \mathbf{R}^2$.
3. Montrer que A et B sont en somme directe et conclure.

Chapitre 9

Polynômes

9.1 Exemple d'introduction

Soit $f : x \mapsto x^2 + 3x - 7$ et $g : x \mapsto x^3 - 4$ deux fonctions définies sur $\mathbf{K}$, où $\mathbf{K}$ est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
f et g sont des **fonctions polynômes**, de degré respectif 2 et 3.
On remarque que :

- $f + g$ est une fonction polynôme de degré 3.
- λf est une fonction polynôme de degré 2 pour tout $\lambda \neq 0$.
- fg est une fonction polynôme de degré $2 + 3 = 5$.
- $\forall x \in \mathbf{R}, g(x) = (x-3)f(x) + 16x - 25$ soit $g = qf + r$ avec le degré de r strictement inférieur[1] au degré de f.

9.2 Degré d'un polynôme

Définition 9.1
On note $\mathbf{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$ à une indéterminée (X).
Soit $A \in \mathbf{K}[X]$.

1. Si $A = 0$, alors on pose $deg(A) = -\infty$.
2. Sinon, $A = \sum_{k \in \mathbf{N}} a_k X^k$, avec au moins un des $a_k \neq 0$.
   On appelle **degré de** A l'entier naturel noté $deg(A)$ et définie par : $deg(A) = max\{n \in \mathbf{N} : a_n \neq 0\}$.
   Les (a_k) sont les **coefficients** de A et $a_{deg(A)}$ est son **coefficient dominant**.

Exemple 9.2

1. $A = 3X^4 + 7$ est un polynôme de degré 4 de $\mathbf{R}[X]$. Ici, $A = a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X^1 + a_0X^0$, avec $a_4 = 3$, $a_3 = a_2 = a_1 = 0$ et $a_0 = 7$ (qui sont bien des réels) (rappel : $X^0 = 1$). Le coefficient dominant[2] est donc 3.
2. $B = (2 + 3i)X^2 - X + 3$ est un polynôme de degré 2 de $\mathbf{C}[X]$, avec $a_2 = 2 + 3i, a_1 = -1$ et $a_0 = 3$ (ce sont bien des complexes). Remarquons par ailleurs que : $A \in \mathbf{C}[X]$.

Propriétés diverses 9.3
Soit A et B deux éléments de $\mathbf{K}[X]$.

1. *$A + B \in K[X]$ et[3] $deg(A + B) \leqslant max(deg(A), deg(B))$.*
   De plus, si $deg(A) \neq deg(B)$, $deg(A + B) = max(deg(A), deg(B))$.
2. *Soit $\lambda \in \mathbf{K}[X]$. Alors $\lambda A \in \mathbf{K}[X]$. De plus, si $\lambda \neq 0$ alors $deg(\lambda A) = deg(A)$. Sinon, $deg(\lambda A) = -\infty$.*
3. *Soient $A = \sum_{k \in \mathbf{N}} a_k X^k$ et $B = \sum_{k \in \mathbf{N}} b_k X^k$.*
   *On **définit** $C = AB$ comme $C = \sum_{n \in \mathbf{N}} c_k X^k$, tel que pour tout entier naturel n, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.*
   Alors : $C \in \mathbf{K}[X]$ et $deg(C) = deg(A) + deg(B)$.

1. C'est dingue, on jurerait voir une division euclidienne !
2. Finalement, ce coefficient dominant est le nombre réel associé au monôme (X^n) de plus grand degré.
3. $max(deg(A), deg(B))$ est le degré maximal entre celui de A et de B.

Exercice 9.1 **Démonstration partielle**

1. Déterminer deux polynômes A et B tels que $deg(A+B) < max(deg(A), deg(B))$.
2. Démontrer la proposition 1.
3. Démontrer la proposition 2.
4. Soit $A = X^2 + 3X - 7$, $B = X^3 - 4$ et $C = AB$.

   Montrer que $c_4 = \sum_{k=0}^{4} a_k b_{4-k} = a_0 b_4 + a_1 b_3 + ... + a_4 b_0$.

Exercice 9.2

Montrer que $(\mathbf{K}[X], +, \lambda.A)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, où $A \in \mathbf{K}[X]$.

9.3 Division euclidienne

Soit $(A, B, C) \in \mathbf{K}[X]^3$.

Définitions 9.4
A est un **diviseur** de B (on note $A|B$)
$\Leftrightarrow$ B est un **multiple** de A
$\Leftrightarrow \exists L \in \mathbf{K}[X] : B = AL$.

Exemple 9.5
Soit $B = (X-1)(X-2)$. Alors $A = (X-1)$ est un diviseur[4] de B et B est un multiple de A.

Exercice 9.3 **Quelques propriétés à montrer**

1. Si A divise B et $B \neq 0$ alors $deg(A) \leqslant deg(B)$.
2. Soit $(A, B) \in K[X]^2$. $A|B$, $B|A \Leftrightarrow$ Il existe $\lambda \in \mathbf{K}^\star$ tel que $B = \lambda A$.
   Dans ce cas, on dit que A et B sont **associés**.

Théorème 9.6 : **: Division euclidienne (admis)**
Supposons $B \neq 0_{\mathbf{K}[X]}$. Alors : Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbf{K}[X]^2$ tel que $A = BQ + R$ et tel que $deg(R) < deg(B)$.

Exemple 9.7
Dans l'exemple d'introduction : $X^3 - 4 = Q(X^2 + 3X - 7) + R$, avec $Q = X - 3$ et $R = 16X - 25$.
Pour trouver Q et R, il faut poser la division, comme cela se fait avec les entiers à l'école primaire.
$A = X^3 - 4$ est le dividende, $B = X^2 + 3X - 7$ le diviseur. Il faut commencer par se demander par quelle puissance de X (éventuellement accompagnée d'un coefficient) multiplier B pour obtenir la plus grande puissance de A.
Ici, le coefficient dominant de A est X^3, celui de B est X^2 : il faut donc multiplier B par X pour faire apparaître X^3. Notons désormais $Q_0 = BX$ et $R_0 = A - Q_0$.
On recommence alors l'opération : cette fois, R_0 est le dividende et B est le diviseur. On continue tant que le degré de R_i n'est pas strictement inférieur à celui de B. C'est somme quelque chose de très similaire à l'algorithme d'Euclide (vu en 3ème et TS-spécialité maths). La division posée est :

Ligne obtenue en faisant :	X^3			-4	$X^2 + 3X - 7$
• $X(X^2 + 3X - 7)$	$-(X^3$	$+3X^2$	$-7X)$		$X - 3$
• $X^3 - (X^3 + 3X^2 - 7X)$	$-3X^2$	$+7X$	-4		
etc...		$-(-3X^2$	$-9X$	$+21)$	
			$16X$	-25	

4. Ici, $L = X - 2$.

Exercice 9.4 **Exemple et corollaire**

1. Effectuer la division euclidienne de $A = X^5 + 4X^4 + 2X^3 + X^2 - X - 1$ par $B = X^3 - 2X + 3$.
2. Démontrer le corollaire suivant : "$B|A \Leftrightarrow$ *Le reste de division euclidienne de A par B est nul.*"

9.4 Racines d'un polynôme

Définition 9.8
Soit $A \in \mathbf{K}[X], \alpha \in \mathbf{K}, k \in \mathbf{N}$. On dit que :

1. α est une racine de A quand $(X - \alpha)|A$.
2. α est une racine d'ordre au moins k de A quand $(X - \alpha)^k|A$.
3. α est une racine d'ordre k quand de A $(X - \alpha)^k|A$ et $(X - \alpha)^{k+1}$ ne divise pas A. Dans ce cas, si $k > 1$, α est une **racine multiple** (sinon, **racine simple**). k est la **multiplicité** de α.
4. Pour $k = 2$, on parle de racine double ; pour $k = 3$, on parle de racine triple.

Exemple 9.9
Soit $A = (X - 1)^3(X - 2)$. Alors 2 est une racine simple et 1 est une racine triple.
Remarquons que 1 est une racine d'au moins deux puisque $(X-1)^2$ divise A ($A = (X-1)^2(X-1)(X-2)$).

Exercice 9.5 **Souvenir de collège**

Montrer que -1 est une racine double de $B = X^2 + 2X + 1$.

Notation 9.10
On notera dans ce chapitre $\tilde{A}$ la fonction polynôme associée à A.

Exemple 9.11
Si $A = 3X^2 - 7$, alors $\tilde{A} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto 3x^2 - 7$.

Proposition 9.12
Soit $A \in \mathbf{K}[X]$. Alors : α est une racine de $A \Leftrightarrow \tilde{A}(\alpha) = 0$.

Exercice 9.6 **Souvenir de première**

Déterminer les racines (et leur multiplicité) de $C = 6X^2 - 23X + 21$, où $C \in \mathbf{C}[X]$.

Exercice 9.7 **Démonstration**

Démontrer la proposition précédente. [5]

Proposition 9.13
α est une racine d'ordre k de $A \Leftrightarrow$ Il existe $B \in \mathbf{K}[X]$ tel que $A = (X - \alpha)^k B$ et tel que $\tilde{B}(\alpha) \neq 0$.

Exemple 9.14
$P = X^3 + 2X^2 + X = X(X^2 + 2X + 1) = X(X^2 + 1)$. Alors -1 est une racine double de P puisque $(X + 1)^2|P$ et $\tilde{X}(-1) = -1 \neq 0$.

Exercice 9.8 **Démonstration**

1. Démontrer le sens direct, en utilisant un raisonnement par l'absurde pour justifier que $\tilde{B}(\alpha) \neq 0$.
2. Montrer le sens réciproque.

5. Pour démontrer le sens réciproque, on pourra penser à faire la division euclidienne de A par $(X - A)$ et étudier le reste.

Théorème 9.15

Soit $A \in \mathbf{K}[X], n \in \mathbf{N}^\star, (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in (\mathbf{N}^\star)^n, (a_1, ..., a_n) \in \mathbf{K}^n$, $a_i \neq a_j$ *dès que* $i \neq j$. *Alors :*

$\prod_{i=1}^{n}(X - a_i)^{\alpha_i} | A \Leftrightarrow$ *Pour tout* i, a_i *est une racine d'ordre au moins* α_i.

Exemple 9.16

Soit $A = -2592 + 1728X + 1994X^2 - 600X^3 - 560X^4 + 16X^5 + 56X^6 + 8X^7 = 8(X+3)^4(X-1)(X-2)^2$.

Alors $(X+3)^2(X-1)$ divise A. Donc -3 et 1 sont des racines d'ordre au moins 2 et 1 (en réalité 4 et 1).

Exercice 9.9 **Démonstration**

Le sens direct est immédiat. Faire la réciproque par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^\star$.

Corollaire 9.17

Soit $A \in \mathbf{K}[X]$, $(a_1, ..., a_s)$ *s racines distinctes de* A *d'ordre au moins* $(\alpha_1, ..., \alpha_s)$. *Notons* λ *le coefficient dominant de* A *et* $n = deg(A)$.

Si $n = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i$ *alors* $A = \lambda \prod_{i=1}^{s}(X - a_i)^{\alpha_i}$.

Exemple 9.18

Dans l'exemple précédent, le polynôme $(X+3)^2(X-1)$ avait pour degré $3 \neq deg(A) = 7$.

En revanche, si on considère le polynôme $(X+3)^4(X-1)(X-2)^2$ qui divise A alors $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 4 + 1 + 2 = 7 = deg(A)$.

Comme le coefficient dominant de A (le coefficient devant la plus grande puissance de A) est 8, alors $A = 8(X+3)^4(X-1)(X-2)^2$.

Exercice 9.10 **Démonstration**

D'après la proposition précédente, il existe $B \in \mathbf{K}[X]$ tel que $A = B \prod_{i=1}^{s}(X - a_i)^{\alpha_i}$.

En déterminant le degré de B, conclure.

Corollaire fondamental 9.19

Un polynôme non nul de degré n *admet au plus* n *racines comptées avec leur ordre de multiplicité. En particulier, si un polynôme de degré inférieur ou égal à* n *possède* $n+1$ *racines alors ce polynôme est nul.*

Exemples 9.20

- $X^2 + 1$ est de degré 2 et admet 0 racine. La somme des multiplicités des racines est inférieur au degré du polynôme.
- $X^2 + 2X + 1$ est de degré 2 et admet une racine de multiplicité 2. La somme des multiplicités des racines est égal au degré du polynôme.
- $X^2 - 1$ est de degré 2 et admet deux racines de multiplicité 1. La somme des multiplicités des racines est égale au degré du polynôme.
- Si l'on considère un polynôme de degré 2, on sait que l'on peut trouver 0, une ou deux racines. Autrement, si l'on trouve 3 racines ou plus, c'est qu'il s'agit du polynôme nul.

9.5 Décomposition sur R et sur C

9.5.1 Sur C

Théorème 9.21 : **: théorème de d'Alembert Gauss (admis)**
Tout polynôme complexe non constant possède au moins une racine.

Théorème 9.22 : **: corollaire du précédent**

Tout polynôme complexe est scindé sur $\mathbf{C}$ *i.e. si* $P \in \mathbf{C}[X]$ *alors* P *s'écrit sous la forme* $P = \lambda \prod_{i=1}^{s} (X - a_i)^{\alpha_i}$.

Remarque 9.23
Cela est faux sur $\mathbf{R}$: en effet, le polynôme $X^2 + 1$ n'est pas scindé[6] sur $\mathbf{R}$ mais l'est sur $\mathbf{C}$: $(X^2 + 1 = (X - i)(X + i))$.

9.5.2 Sur R

Théorème 9.24 : **Théorème de factorisation sur R (admis)**
Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. *Alors :*
$P(X) = \lambda \prod_{i=1}^{s} (X - a_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^{r} (X^2 + b_j X + c_j)^{\beta_j}$, *avec* $\Delta_j = b_j^2 - 4c_j < 0$.

Interprétation 9.25
Ainsi, dans $\mathbf{R}[X]$, tout polynôme de degré supérieur ou égal à 3 est décomposable en un produit de polynômes de degré 1 et de degré 2. Les polynômes de degré 2 ne sont décomposables en polynômes de degré 1 que si le discriminant Δ associé est supérieur ou égal à 0, i.e. s'ils admettent des racines dans $\mathbf{R}$.

Remarque 9.26
Finalement, on peut toujours décomposer dans $\mathbf{C}[X]$ (pour les polynômes de degré au moins 2) car il est toujours possible de trouver des racines (si l'on pense à la résolution des équations de degré 2, on peut toujours trouver une solution dans $\mathbf{C}$), ce qui n'est pas le cas dans $\mathbf{R}$.

Exercice 9.11 **Exemple**

1. En écrivant z sous sa forme exponentielle, résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $z^4 = -1$. Conclure quant à une factorisation de $X^4 + 1$ sur $\mathbf{C}$.
2. En remarquant que $X^4 + 1 = X^4 + 2X^2 + 1 - 2X^2$, proposer une factorisation de $X^4 + 1$ sur $\mathbf{R}$.[7]

9.6 Exercices

Exercice 9.12
Factoriser dans $\mathbf{C}[X]$

1. $X^6 + 27$.
2. $X^n - 1$, où $n \in \mathbf{N}^\star$ (les racines sont appelées racines n^{ième} de l'unité).

Exercice 9.13
Déterminer le complexe a tel que $P = X^4 - X + a$ et $Q = X^2 - aX + 1$ aient deux racines communes distinctes.[8]

Exercice 9.14
Déterminer la valeur de d telle que le polynôme $P(X) = 2X^3 - X^2 - 7x + d \in \mathbb{C}[X]$ possèdent deux racines dont la somme est égale à 1.

6. En effet, sinon il existerait $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que α soit une racine de $X^2 + 1$, i.e. tel que $\alpha^2 + 1 = 0$ soit $\alpha^2 = -1$.
7. Pour la question 2, pensez aux identités remarquables.
8. Pensez que l'on peut écrire Q comme $Q(X) = 1(X - b)(X - c)$ avec $b \neq c$ puisque Q a pour coefficient dominant 1 et deux racines distinctes.

Exercice 9.15

▲ Soit P un polynôme de $\mathbf{R}[X]$ de fonction polynomiale f associée périodique (c'est à dire qu'il existe un réel T tel que pour tout réel x, $f(x+T) = f(x)$).
Montrer que P est un polynôme constant. [9]

Exercice 9.16 **Libérer, dériver**

Soit $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

On appelle **polynôme dérivé de** A le polynôme noté A' défini par $A' = \sum_{k=1}^{n} a_k k X^{k-1}$.

1. Soit $P = X^3 + 3X^2 - 2X - 7$. Vérifier que la définition du polynôme dérivé est cohérent avec la dérivée usuelle de $\tilde{P}$.

   Par commodité et par manque de place, on admettra pour les questions suivantes que tout ce que l'on connaît de la dérivation fonctionne de la même manière ici (produit, primitive notamment).

2. ▲ Pour $k \in \mathbf{N}^\star$, on note $k! = k \times (k-1) \times ... \times 2 \times 1$ la **factorielle** de k (se lit aussi "k factoriel").

   Démontrer la formule de Taylor : *Pour* $a \in K$, $P(X) = \sum_{k=0}^{deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$.

3. Démontrer le théorème suivant, permettant de caractériser l'ordre d'une racine d'un polynôme à l'aide de la dérivation :
   Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ *de degré* $n \geqslant 1$ *et* $a \in K$. *Alors :*
   a *est une racine d'ordre* n *de* $P \Leftrightarrow P(a) = P'(a) = ... = P^{(n-1)}(a) = 0$ *et* $P^{(n)}(a) \neq 0$. [10]

Exercice 9.17

Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $P|Q$.
Est-ce que $P'|Q'$?

9. Indication : considérer le polynôme $Q(X) = P(X) - P(0)$.
10. La formule de Taylor de cet exercice est à rapprocher de la formule de Taylor avec reste intégral (chapitre 4).

Chapitre 10

Espace vectoriel en dimension finie

Avertissement : il est impératif d'avoir travailler le chapitre "espace vectoriel" avant ce chapitre.

Dans tout le chapitre, on notera E un $\mathbf{K}$-ev.

10.1 Introduction géométrique

• Une droite est un **espace vectoriel de dimension 1** (sachant que dans un ev, un élément passe nécessairement par l'origine, il faut et il suffit un seul vecteur pour définir une droite). On l'associe à $\mathbf{R}$.

• Un plan passant par $0_{\mathbf{R}^2} = (0;0)$ est un espace vectoriel de dimension 2 (deux vecteurs suffisent et sont nécessaires pour définir un plan). On l'associe à $\mathbf{R}^2$.

• Le lecteur perspicace aura deviné : l'espace tel que nous le représentons (contenant $0_{\mathbf{R}^3} = (0;0;0)$) est un espace vectoriel de dimension 3. On l'associe à $\mathbf{R}^3$.

• Dans l'espace de dimension 3, un plan passant par 0_{R^3} est un sous-espace vectoriel de dimension 2 et une droite passant par $0_{\mathbf{R}^3}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1.

• Enfin, deux vecteurs non colinéaires sont également appelées vecteurs **libres**.

• *A titre d'informations, une droite ne passant pas par l'origine est un espace affine (c'est évidemment lié à la définition d'une fonction affine !) et cette notion se généralise pour les espaces vectoriels de dimension 2, 3, 4... Toujours à titre d'informations, l'espace vectoriel de dimension 4 est appelé "hyperespace".*

Exercice 10.1 **Au fait...**

...à quoi correspond un espace vectoriel de dimension nulle ?

10.2 Base

Définition 10.1

Soit n un entier naturel non nul.
Soit $(e_1, ..., e_n)$ une famille d'éléments de E.

• Si $E = Vect(e_1, ..., e_n)$, alors $(e_1, ..., e_n)$ est une **famille génératrice** de E.
Dit autrement, tout élément de E peut s'exprimer comme combinaison linéaire des $(e_1, ..., e_n)$.

• Si, pour tout $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$, $\left[\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0_{\mathbf{K}}\right]$, alors $(e_1, ..., e_n)$ est une **famille libre** de E.
Dans le cas contraire, c'est une **famille liée**.

• Une famille à la fois libre et génératrice de E est une **base** de E.

Remarques 10.2

- Rappelez-vous, dans l'espace, pour que trois points A, B et C définissent un plan, il faut que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient des vecteurs non colinéaires (donc libres). Cela induit que l'on peut exprimer tout autre vecteur en fonction de ces deux-là.
Dans cas, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une famille de deux vecteurs du plan définissant une base de plan.

- Pour qu'une famille de vecteurs soit une base en géométrie, il faut donc que les vecteurs ne soient pas colinéaires et que l'on puisse exprimer tous les autres vecteurs en fonction des vecteurs de cette famille.
  Pourquoi parler alors de familles libres et non de vecteurs colinéaires ? En fait, la notion de "vecteurs colinéaires" est propre à la géométrie. Or nous avons vu dans le chapitre sur les ev que ceux-ci pouvaient être très variés, avec par exemple des ev de fonctions. Pour ceux-ci, la racine "colinéaire" (qui partage une même ligne) n'aurait aucun sens. Le terme générique qui a alors été choisi est "libre", ce qui doit être compris comme "deux vecteurs de la famille ne sont pas proportionnels, donc ne dépendant pas, des autres de la famille".

Exemple 10.3

⋆ $B = ((1;0);(0;1))$ est une base de $\mathbf{R}^2$ (elle est appelée base canonique).

⋆ En effet, pour tout élément de $\mathbf{R}^2$, c'est à dire s'écrivant sous la forme $(a;b)$, on peut écrire que $(a;b) = a(1;0) + b(0;1)$. B est donc une famille génératrice de $\mathbf{R}^2$.

⋆ De plus, soit μ et λ tels que $\mu(1;0) + \lambda(0;1) = 0_{\mathbf{R}^2} = (0;0)$.

Alors : $(0;0) = (\mu;\lambda)$. Donc : $\mu = 0 = \lambda$.

Donc : la famille $((1;0),(0;1))$ est libre.

⋆ B est donc génératrice et libre de $\mathbf{R}^2$: c'en est donc une base.

Exercice 10.2 **Exemples**

1. Donner un exemple d'une famille de cardinal 2 de $\mathbf{R}^2$ (c'est à dire comportant deux éléments) qui ne soit pas une famille libre.
2. Déterminer une base de $\mathbf{R}^3$ (autre que la base canonique ((1 ;0 ;0), (0 ;1 ;0) , (0 ;0 ;1))).
3. Justifier que $(1, X, X^2, ..., X^n)$ est une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n.

Théorème 10.4

$(e_1, ..., e_n)$ *est une base de* $E \Leftrightarrow \forall x \in E, \exists!\ (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbf{K}^n : x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$.

Exercice 10.3 **Démonstration**

1. Démonstration du sens direct.
   (a) Soit $x \in E$. Justifier de l'existence d'une famille $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ telle que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$
   (b) En utilisant le caractère libre de $(e_1, ..., e_n)$, démontrer l'unicité d'une telle famille.
2. Démonstration du sens réciproque.
   (a) Justifier que $(e_1, ..., e_n)$ est une famille génératrice.
   (b) Justifier que $(e_1, ..., e_n)$ est une famille libre et conclure.

Remarque 10.5

$(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ sont les **coordonnées** de x.

Pensez aux coordonnées dans le cube. Une fois que les vecteurs de la base sont choisis, les coordonnées de chacun des sommets sont uniques. C'est ce que raconte ce théorème.

Exercice 10.4

Déterminer les coordonnées du polynôme $X^3 - 2X^2 + 7 - 4X$ dans l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 5 muni de la base canonique $(1, X, X^2, X^3, X^4, X^5)$.

10.3 Notion de dimension finie

Définition 10.6
E est dit de **dimension finie** si E possède une famille génératrice finie.

Théorème (admis) 10.7
- *De toute famille génératrice finie de E, on peut extraire une base de E.*
- *Toute famille libre d'un ev E de dimension finie peut être complétée en une base de E.*

Définition/Proposition 10.8
Soit E un ev de dimension finie.
Si B et B' sont deux bases de E, alors[1] $card(B) = card(B')$.
Ce cardinal commun est appelée **dimension** de E et est noté $dim(E)$.

Exemple 10.9
- $((1;0),(0;1))$ est une base de $\mathbf{R}^2$ et est de cardinal 2 : $\mathbf{R}^2$ est donc de dimension 2.
- $((1;0;0),(0;1;0)$ est une famille libre de $\mathbf{R}^3$, complétable en une base (la base canonique).
- $((1;0;0),(1;1,0),(0;1;0),(0;0;1))$ est une famille génératrice de $\mathbf{R}^3$, dont on peut extraire une base (la base canonique, là encore[2]).

Exercice 10.5 **Autres exemples**

1. Donner la dimension de $\mathbf{C}$ comme $\mathbf{C}$-ev puis comme $\mathbf{R}$-ev.
2. Donner la dimension de l'ev des polynômes de degré inférieurs ou égal à $n \in \mathbf{N}$ (*non, ce n'est pas n!*).

▲ *A partir d'ici, ce n'est plus la même limonade ! On passe à l'abstrait. Le cours est dépouillé comme peut l'être un cours dans le supérieur. À vous de faire l'effort de comprendre. Pensez à la géométrie dans l'espace et cherchez vos propres exemples.*

10.4 Dimension et application : une série de théorèmes (très) utiles

Théorème (admis) 10.10
Soit n un entier naturel non nul.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie dont $B = (e_1, ..., e_n)$ est une base.
Alors toute famille libre de E a un cardinal inférieur ou égal à n.

Corollaire 10.11
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n dont F est une famille libre.
Alors : $card(F) = n \Leftrightarrow F$ est une base de E.

Exercice 10.6 **Démonstrations par l'absurde**

1. Montrer le lemme suivant : "Soit F une famille libre de E et soit $u \in E$. $F \cup \{u\}$ est encore une famille libre de E si et seulement si $u \notin vect(F)$."
2. À l'aide de ce lemme et du théorème précédent, démontrer le corollaire.

Remarque 10.12
En résumé, une famille libre d'un ev de dimension finie n a au plus n éléments, avec égalité si et seulement si cette famille est une base.

Théorème 10.13
Si E est un $\mathbf{K}$-ev de dimension finie, alors tout sev F de E est aussi de dimension finie et $dim(F) \leqslant dim(E)$.
De plus : $dim(F) = dim(E) \Leftrightarrow F = E$.

1. $card(B)$ est le cardinal de B, c'est à dire le nombre d'éléments de B.
2. Quelle originalité, c'est dingue !

Théorème 10.14
Soit E un $\mathbf{K}$-ev de dimension finie et F un K-ev.
$f : E \to F$ est un isomorphisme $\Leftrightarrow$ F est de dimension finie et $dim(E) = dim(F)$.

Théorème 10.15 : **: existence du supplémentaire**
Soit E un $\mathbf{K}$-ev de dimension finie et A un sev de E. Alors il existe B, sev de E, tel que : $A \bigoplus B = E$.
En particulier, on a alors $dim(A) + dim(B) = dim(E)$.
De plus, si $(e_1, ..., e_p)$ est une base de A et $(e_{p+1}, ..., e_n)$ une base de B,
alors $(e_1, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_n)$ est une base de E.

Théorème 10.16 : **Formule de Grassman** [3]
Soit A et B deux sev de dimension finie de E.
Alors $A + B$ et $A \cap B$ sont de dimension finie et $dim(A + B) = dim(A) + dim(B) - dim(A \cap B)$.

Exercice 10.7 **Démonstration**

1. Montrer qu'il existe C sev de A tel que $dim(A) = dim(A \cap B) + dim(C)$.
2. Montrer que $B + C = A + B$ puis que $B \bigoplus C = A + B$.
3. Conclure.

Exercice 10.8

La lectrice courageuse pourra démontrer les autres théorèmes de cette partie.

Exemple 10.17
Comme je suis pas drôlement sympa, voici un exemple.

- On se place dans l'espace associée à $E = \mathbf{R}^3$.
- $A = vect[(1, 0, 0), (2, 1, 0)]$ est une famille libre de E, correspondant au plan de vecteurs directeurs $(1, 0, 0)$ et $(2, 1, 0)$. Son cardinal est de 2 et est inférieur à la dimension de E, qui est 3.
- On peut compléter A avec $B = vect((0, 0, 7))$. Dans ce cas, A et B sont en somme directe dans E. Comme $(e_1, e_2) = ((1, 0, 0), (2, 1, 0))$ est une base de A et que $(e_3) = (0, 0, 7)$ est une base de B, alors $(e_1, e_2, e_3) = ((1, 0, 0), (2, 1, 0)), (0, 0, 7)$ est une base de E

10.5 Rang d'une application linéaire

Dans cette partie, on considère une application $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Définition 10.18
Le **rang** de f est la dimension de $Im(f)$, quand cette dernière est finie.

Exercice 10.9 **Proposition ▲**

Montrer que si E ou F est de dimension finie, alors f est de rang fini et $rg(f) \leqslant dim(F)$.

Théorème fondamental 10.19 : **: formule du rang**
Soit E un $\mathbf{K}$ ev de dimension finie.
Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $dim(E) = dim(ker(f)) + rg(f)$.

Exercice 10.10 **Démonstration**

1. Commençons par montrer le lemme suivant :
   "Soit G un sev supplémentaire de $ker(f)$ dans E alors $\phi : G \to Im(f), x \mapsto f(x)$ est un isomorphisme".
2. Conclure. [4]

3. On pourrait noter l'étonnante similitude qui existe entre cette formule et celle de la probabilité de l'union vue au lycée.
4. Attention, pour la démonstration du lemme, il faut (brièvement) justifier l'existence d'un tel supplémentaire.

Remarque 10.20

Que raconte au fond ce théorème ? Lorsque l'on travaille en dimension finie, le noyau d'une application linéaire[5] a pour supplémentaire G, qui est isomorphe à l'image de application linéaire.

Un élément de E peut donc s'écrire comme somme d'un élément du noyau de f et d'un élément de l'image f. Grossièrement, soit vous êtes dans le noyau ($ker(f)$), soit vous êtes dans l'ensemble des éléments amputé du noyau (G).

Exercice 10.11 **Application**

Soit $D : \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}_n[X], P \mapsto P'$ l'application qui à tout polynôme de degré au plus n associe le polynôme dérivé.
Montrer que $Im(D) = \mathbf{R}_{n-1}[X]$. [6]

Théorème 10.21 : **: caractérisation des isomorphismes**

Soit E, F deux $\mathbf{K}$-ev de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose de plus que $dim(E) = dim(F)$. Alors : f est injective $\Leftrightarrow$ f est surjective $\Leftrightarrow$ f est bijective.

Exercice 10.12 **Démonstration**

Montrer que : f est injective $\Rightarrow$ f est surjective $\Rightarrow$ f est injective.

Remarques 10.22

- C'est évidemment faux en dimension infinie ou si E et F non pas même dimension !
- Par exemple, soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x, y) \mapsto x$. $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ est surjective mais n'est pas injective ($(0, 1) \in ker(f)$ et $(0, 1) \neq (0, 0)$)[7].

10.6 Exercices

Exercice 10.13 **Sur une remarque a priori anodine**

Donner un exemple d'une fonction linéaire surjective mais non injective.

Exercice 10.14 **Sur les familles libres**

Soit f et g les fonctions définies pour tout réel x par $f(x) = x$ et $g(x) = exp(x)$.
Montrer que la famille de fonctions (f, g) est une famille libre de l'ev des fonctions réelles définies sur $\mathbf{R}$. [8]

Exercice 10.15 **Dimension d'un sev de $\mathbf{R}^3$**

Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y + z = 0\}$.

1. Montrer que E est bien un $\mathbf{R}$-sev de $\mathbf{R}^3$:
   (a) à l'aide du théorème de caractérisation des sev ;
   (b) à l'aide de l'application $\phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, (x, y, z) \mapsto x + y + z$.
2. Déterminer une famille libre de cardinal 2 (c'est à dire une famille libre de deux éléments) de E.
3. E peut-il être de dimension 3 ? Conclure quant à la dimension de E. Pouvait-on anticiper ce résultat ?
4. En déduire le rang de ϕ. Comment peut-on géométriquement interpréter ce résultat ?

Exercice 10.16 **Forcément non réduit à zéro**

Soit F et G deux plans dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$. Montrer que $F \cap G \neq (0, 0, 0)$, c'est à dire que l'intersection des deux plans ne peut pas être réduit au point de coordonnées $(0, 0, 0)$. [9]

5. Donc, basiquement, les antécédents de 0.
6. Voir la partie exercices du chapitre "Polynômes" pour la définition (certes intuitive) du polynôme dérivé.
7. Rappelons en effet qu'une application linéaire de E dans F est injective si et seulement si son noyau est réduit à 0_E.
8. La fonction f est appelée fonction identité.
9. Rappelons que puisque l'on travaille dans les espaces vectoriels, tous les ev passent par $(0, 0, 0)$. Donc il y a au moins le point de coordonnées $(0, 0, 0)$ dans l'intersection.

Exercice 10.17 Forcément non réduit à zéro - le retour

Soit F et G deux sev de dimension 3 de $\mathbf{R}^5$. Montrer que $F \cap G \neq 0_{\mathbf{R}^5}$.

Exercice 10.18 Le rang de Grassman

Soit E un $\mathbf{K}$-ev de dimension finie.

1. Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$. Montrons que $rg(f+g) \leqslant rg(f) + rg(g)$.
2. On suppose de plus que $f+g$ est bijective et que : $\forall x \in E, g(f(x)) = 0_E$.
   Montrer que $rg(f) + rg(g) = dim(E)$.

Exercice 10.19 Histoires de bases, sans guide

Les différentes questions sont indépendantes les unes des autres.

1. Déterminer une base de $G = \{(x, y, z) : x + 2y + z = 0\}$, sev de $\mathbf{R}^3$.
2. Soit P un polynôme de degré n. Montrer que la famille composée de P et de ses n dérivées successives non nulles forme une base de $\mathbf{R}_n[X]$ (polynôme de degré au plus n).
3. Soit $H : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, (x, y, z) \mapsto (y + z, x + y + z, x)$.
   Déterminer la dimension ainsi qu'une base pour $ker(H)$ et $Im(H)$.

Exercice 10.20 Polynômes d'interpolation de Lagrange, un grand classique !

Soit $(a_0, ..., a_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$, $(b_0, ..., b_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$ tels que pour tout $i \in [0; n]$, $a_i \neq b_i$. On veut montrer qu'il existe un unique polynôme de degré n de $\mathbf{K}[X]$ tel que pour tout $i \in [0; n]$, $P(a_i) = b_i$.

1. Soit $\Phi : \mathbf{K}_n[X] \mapsto \mathbf{K}^{n+1}, Q \mapsto (Q(a_0), ..., Q(a_n))$. Démontrer que Φ est linéaire.
2. Démontrer que Φ est injective.
3. A l'aide du corollaire du théorème de caractérisation des isomorphismes, conclure.

Chapitre 11

Élements de correction des exercices

Avertissement sur cette partie : certains corrigés sont partiels, d'autres, plus rares sont complets, tous comportent largement suffisamment d'informations pour vous permettre de finir.

11.1 Quelques éléments de logique

Solution exercice 1.1

Pas de bonne réponse ! S'il dit la vérité, alors c'est qu'il est en train de mentir, ce qui est contradictoire. De même, s'il ment, alors cela signifie qu'il n'est pas en train de mentir, ce qui est tout aussi contradictoire ! C'est donc un paradoxe.

Solution exercice 1.2

L'implication ("Si ABCD est un carré, alors ABCD est un parallélogramme") est vraie, la réciproque ("si ABCD est un parallélogramme, alors ABCD est un carré") est fausse.

Solution exercice 1.3

1. Si un triangle ABC est rectangle en A, alors il est inscrit dans un cercle de diamètre [BC] : vrai.
2. Si un triangle est isocèle, alors un de ses médianes est aussi hauteur : vrai.
3. Si un quadrilatère a des diagonales de mêmes longueur, alors c'est un rectangle : faux (contre-exemple : un trapèze bien choisi. Attention, le carré étant un rectangle particulier, ce n'est pas un contre-exemple).

Solution exercice 1.4

• Démontrons dans un premier temps que si z est un imaginaire pur alors $z^2 < 0$.
Comme z est un imaginaire pur, il exsite $y \in \mathbf{R}$ tel que $z = iy$.
donc : $z^2 = (iy)^2 = i^2y^2 = -y^2 < 0$.
Donc le sens réciproque est vérifié.

• Réciproquement, démontrons le sens direct. Supposons donc que z soit un complexe tel que $z^2 < 0$.
A noter que l'on ne peut écrire $x < 0$ que si x est un réel : cela n'a pas de sens avec un complexe ! Cela signifie donc que $z^2 \in \mathbf{R}$.
Soit a et b deux réels tels que $z = a + ib$.
Alors : $z^2 = (a + ib)^2 = a^2 + 2aib - b^2$.
Or : z^2 est un réel. Donc $2ab = 0$ i.e soit $a = 0$ soit $b = 0$. On a donc trois cas possibles :
⋆ Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors $z^2 = -b^2$ donc $z^2 < 0$
⋆ Si $a \neq 0$ et $b = 0$ alors $z^2 = a^2$ donc $z^2 > 0$.
⋆ Si $a = 0$ et $b = 0$ alors $z^2 = 0$.
Comme $z^2 < 0$, on en déduit que $a = 0$ et $b \neq 0$, i.e. $z = ib$.
Ainsi : z est bien un imaginaire pur.

• Conclusion : $z^2 < 0$ si et seulement si z est un imaginaire pur.

Solution exercice 1.5

La première est vraie **pour tout** réel x (c'est une identité remarquable).
Il existe une valeurs de x pour lesquelles la deuxième égalité est vraie (pour $x = 0$) mais elle n'est pas toujours vraie (fausse pour $x = 1$ par exemple).

Solution exercice 1.6

$(1) \Leftrightarrow B)$; $(2) \Leftrightarrow (A)$; $(3) \Leftrightarrow (C)$.

Solution exercice 1.7

1. $\forall$
2. $\exists$ (le milieu)
3. $\exists$ (le milieu)
4. $\forall$ (inégalité triangulaire)
5. $\exists$ (tout point de la médiatrice)
6. ni l'un ni l'autre, sinon $A = B$.

Solution exercice 1.8

x	$x^2 > 1$	$x < 0$	$x^2 > 1$ et $x < 0$	$x^2 > 1$ ou $x < 0$
-5	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai
$\sqrt{3}$	Vrai	Faux	Faux	Vrai
$-0,8$	Faux	Vrai	Faux	Vrai
$\frac{5}{6}$	Faux	Faux	Faux	Faux

A l'aide de cet exercice, on comprend dès qu'une propriété est fausse, le "et" est faux et pour que le "ou" soit vrai, il faut que soit l'un, soit l'autre, soit les deux soient vraies.

Solution exercice 1.9

1. $\bar{A}$: ne pas obtenir un trèfle. $\bar{B}$: ne pas obtenir un roi et ne pas obtenir une dame (**la négation du "ou" donne du "et", et réciproquement**).
2. $\bar{C}$: aucune carte n'est un as. $\bar{D}$: il existe au moins une carte qui ne soit pas un coeur (**la négation de "pour tout" donne du "il existe", et réciproquement**).

Solution exercice 1.10

1. Soit n un entier naturel tel que n^2 soit pair.
   Montrons par l'absurde que n est pair également.
   Supposons donc que n ne soit pas pair, c'est à dire que n soit impair.
   Alors : il existe un entier naturel k ($k \in \mathbf{N}$) tel que $n = 2k + 1$.
   D'où : $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + k) + 1$.
   Donc : n^2 est impair, ce qui contradictoire avec notre hypothèse de départ !
   Donc : n ne peut pas être impair.
   Donc : n est pair.
2. Réciproquement, supposons que n soit pair. Alors il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $n = 2k$.
   Donc : $n^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$.
   Donc : n^2 est pair.
   Donc : la réciproque est vraie.

Remarque : La propriété est donc une équivalence ! Ainsi : n pair $\Leftrightarrow n^2$ pair.

Solution exercice 1.11 *Quelques pistes pour trouver la solution par vous-même.*

1. Ici, les hypothèses de l'énoncé sont : P//P' ; Q coupe P.
   On veut montrer alors que Q coupe aussi P'.
   Ajoutons donc l'hypothèse : Q **ne** coupe **pas** P' et montrons que c'est absurde.
   (a) Que dire alors de Q et P' ?
   (b) Que peut-on en déduire pour Q et P ? Quelle est la contradiction ? Conclure.
2. Montrons, toujours par l'absurde, que : $(d)//(d')$.
   (a) Quelle hypothèse supplémentaire faut-il faire ?
   (b) Pourquoi les droites (d) et (d') sont-elles alors sécantes ? Attention, deux droites dans l'espace ne sont pas seulement soit sécantes, soit parallèles...
   (c) Soit I leur point d'intersection. Montrer que : $I \in P$ et $I \in P'$.
   (d) Conclure.

Solution exercice 1.12

Montrons par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Supposons donc que $\sqrt{2}$ est rationnel, c'est à dire qu'il existe deux entiers relatifs p et q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. On suppose de plus que la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible.

Alors : $2 = \frac{p^2}{q^2}$ i.e. $p^2 = 2q^2$.
Donc : p^2 est pair. Donc, d'après l'exercice précédent, p est pair.
Ainsi, il existe $m \in N$ tel que $p = 2m$. D'où : $p^2 = 4m^2$.
D'où : $4m^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2m^2 = q^2$.
Donc : q^2 est pair c'est à dire q est pair.
Il existe donc $n \in \mathbf{N}$ tel que $q = 2n$.
D'où : $\frac{p}{q} = \frac{2m}{2n} = \frac{m}{n}$.
Or : $\frac{p}{q}$ est irréductible ! On aboutit donc à une contradiction.

Donc : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, c'est à dire$\sqrt{2}$ est irrationnel.

Note : pour la lectrice curieuse, montrer que $\dfrac{1}{3}$ *n'est pas décimal, c'est à dire qu'il n'existe aucun couple d'entiers* $(m;n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ *tels que* $\dfrac{1}{3} = \dfrac{m}{10^n}$.

Solution exercice 1.13

1. $(x\ ;\ y)$ définit un TRPI si et seulement si, d'après le théorème de Pythagore, $y^2 = x^2 + (x+1)^2 = 2x^2 + 2x + 1$
2. Remarquons que $1 \leqslant x < y$ d'après l'inégalité triangulaire.
   Si $x = 1$, alors $y^2 = 2 \times 1^2 + 2 \times 1 + 1 = 7$. Ainsi, $y = \sqrt{7} \notin \mathbf{Z}$.
   De même pour $x = 2$. En revanche, pour $x = 3$, $y^2 = \ldots = 25$ donc $y = 5$. Donc $(3;5)$ est un TRPI, et ce sont les plus petites valeurs fonctionnant.
3. (a) $\star$ Montrons le sens direct de la proposition, c'est à dire montrons que si n est un nombre impair, alors n^2 est aussi un nombre impair.
   On sait que si n est un nombre impair, il existe un autre entier naturel k tel que $n = 2k+1$.
   Alors : $n^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2 \times 2k \times 1 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$, où $k' = 2k^2 + 2k$ est un entier naturel.
   Donc : n^2 est bien un nombre impair.

   $\star$ Réciproquement, montrons que si n^2 est un nombre impair alors n est un nombre impair.
   Pour cela, réalisons une démonstration par l'absurde.
   Supposons donc que n soit un nombre pair.
   Il existe alors un entier naturel k tel que $n = 2k$.
   Donc : $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$, où $2k^2$ est un entier naturel.
   Donc : n^2 est pair, ce qui est en contradiction avec le fait que n^2 soit impair.
   Notre hypothèse de départ est donc fausse.
   Ainsi, n ne peut pas être pair. n est donc bien un nombre impair.

   $\star$ Conclusion : n est un nombre impair si et seulement si n^2 est un nombre impair.

   (b) D'après la question 1, $y^2 = 2(x^2 + x) + 1 = 2k + 1$, avec $k = x^2 + x \in \mathbf{Z}$.
   Donc y^2 est un nombre impair. Donc, d'après la question précédente, y est un nombre impair.
4. Si $(x;y)$ définit un TRPI, alors $1 = y \times y + x(-2x-2) = ya + xb$, avec $(a;b) \in \mathbf{Z}^2$.
   Donc, d'après le théorème de Bezout, x et y sont premiers entre eux.

Solution exercice 1.14

Remarquons que puisque AC est le plus grand côté, le triangle, s'il est rectangle, ne peut être rectangle que en B.
Or : $AB^2 + BC^2 = 9 + 16 = 25$ et $AC^2 = 36$.
Donc, d'après la **contraposée** du théorème de Pythagore, le triangle ABC n'est pas rectangle en B.

Solution exercice 1.15

Montrons par contraposée que si n^2 est pair alors n est pair.
Si n est impair ("non Q"), alors il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $n = 2k+1$.
Donc : $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 2k + 1$ est impair ("non P").
Conclusion : si n^2 est pair, alors n est forcément pair (puisque sinon n^2 serait impair) !

Solution exercice 1.16

1. Soit $p \in A$. Montrons que $P \in B$.
   Comme $p \in A$, alors p^2 est pair.
   Or, d'après l'exercice 1.10, un entier n est pair si et seulement si n^2 est pair également.
   On en déduit que p est pair.
   Donc : $p \in B$.
   Ceci valant pour tout élément de A, on en conclut que A est inclus dans B.
2. Soit $f \in C$. Montrons que f est une fonction paire.
   Comme $f \in C$, il existe un entier n tel que pour tout réel x, $f(x) = x^{2n} = (x^2)^n$.
   Ainsi, pour tout réel x, $f(-x) = ((-x)^2)^n = (x^2)^n = x^{2n} = f(x)$.
   Donc : f est une fonction paire.
   Ceci valant pour tout élément de C, on en conclut que C est inclus dans l'ensemble des fonctions paires.

11.2 Quelques structures algébriques

11.2.1 Partie cours

Exemple d'introduction

$\times$	-1	1
-1	1	-1
1	-1	1

$+$	-1	1
-1	-2	0
1	0	2

Dans le premier tableau, on obtient toujours des nombres de départ (soit 1, soit -1). Ce n'est pas le cas pour le second tableau : on commence avec l'ensemble $\{-1;1\}$ et on en sort puisque l'on obtient -2, 0 et 2.

Solution exercice 2.1

1. Pour tous $(x,y,z) \in \mathbf{Z}^3$, alors $x+y \in \mathbf{Z}$, $(x+y)+z = x+(y+z)$, $e=0$, $-x$ est le symétrique de x $(x+(-x)) = 0$.
2. Même principe que l'exemple d'intro, avec 4 entrées en ligne et en colonne.
3. La propriété 4 n'est pas vérifiée. En effet, $42 \in \mathbf{N}$ mais $\forall n \in \mathbf{N}$, $42+n \neq 0$. Donc : 42 n'admet pas d'élément symétrique.
4. Non (4 n'est pas vérifiée : en effet, l'élément neutre est 1 et 0 n' pas d'inverse).
5. Oui (en particulier car $(f+g)' = f'+g'$).
6. Non commutatif car pour $(A,B) \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})^2$, AB n'est pas forcément (et même très rarement) égal à BA. L'élément neutre est la matrice identité. Le reste se vérifie facilement.

Solution exercice 2.2

1. Soient deux éléments e' et e de G vérifiant la propriété 3. Alors : $e' = e' \star e$ car e est "neutre" et $e' \star e = e$ car e' est "neutre". Donc : $e' = e$. D'où l'unicité.
2. Soient y, z deux éléments de G vérifiant les propriétés de symétrique de x. Alors : $y = y \star e = y \star (x \star z) = (y \star x) \star z = e \star z = z$.
3. $(x \star y) \star (y^{-1} \star x^{-1}) = ... = e$ et $(y^{-1} \star x^{-1}) \star (x \star y)$ d'où la conclusion avec l'unicité du symétrique.

Solution exercice 2.3

1. $e = e'^{-1} \star e' = (e'^{-1} \star e') \star e' = e \star e' = e'$.
2. Soit h' le symétrique de h dans H. On rappelle qu'on note h^{-1} le symétrique de h dans G. Alors : $h' = h' \star e = h' \star (h \star h^{-1}) = (h' \star h \star) h^{-1} = e \star h^{-1} = h^{-1}$.

Solution exercice 2.4

1. Si (1) $\Rightarrow$ (2) et (2) $\Rightarrow$ (3) alors (1) $\Rightarrow$ (3). Si de plus (3) $\Rightarrow$ (1) alors (1) $\Leftrightarrow$ (3). De même pour le reste.
2. Voir exercice précédent + définition de groupe.
3. Supposons (2) vrai. Alors H est non vide et pour tout $(x,y) \in H^2$, comme $y^{-1} \in H$, $x \star y^{-1} \in H$. Donc (3) est vraie.
4. Soit $x \in H$ (x existe car H est non vide). Alors : $e = x \times x^{-1} \in H$. D'où l'élément neutre de H (propriété 3 dans la définition des groupes). De plus, si $x^{-1} = e \star x^{-1} \in H$. D'où le symétrique (propriété 4). De plus, pour $(x,y) \in H^2$, $y^{-1} \in H$ d'où $x \star (y^{-1})^{-1} = x \star y \in H$ (d'où la propriété 1). L'associativité dans H découle de celle dans G.
   Les 4 conditions sont donc vérifiées : H est un sous-groupe de G comme groupe inclus dans G.

Solution exercice 2.5

Les trois questions se font sans difficulté particulière, en utilisant la propriété 3 démontrée précédemment.
Par exemple, H est non vide (contient e) et $e \star e^{-1} = e^{-1} = e \in H$. Donc : H est un sous-groupe de G.

Solution exercice 2.6

1. $a \times 0_A = a \times (0_A + 0_A) = a \times 0_A + a \times 0_A$. D'où : $0_A = a \times 0_A - a \times 0_A = a \times 0_A$. etc
2. $a \times (-b) + a \times b = a \times (b-b) = a \times 0_A = 0_A$ d'après la propriété précédente. Donc : $a \times (-b) = -a \times b$. De même, $(-a) \times b = -a \times b$. La suite est immédiate avec ce que l'on vient de démontrer.
3. Démonstration par récurrence.

Solution exercice 2.7 Se fait en vérifiant les 4 points de la définition de base d'un groupe (on ne peut pour le coup utiliser l'astuce consistant à passer par les caractérisations des sous-groupes). A noter que de nombreux points sont déjà vérifiés par la définition de l'anneau !

Solution exercice 2.8

1. Sans difficulté, avec 0 comme élément neutre pour l'addition et 1 comme élément neutre pour la multiplication $\times$.
2. Idem, avec la matrice nulle comme élément neutre pour l'addition et la matrice identité comme élément neutre pour la multiplication.

Solution exercice 2.9

1. C'est évidemment un anneau. De plus, pour $q \in \mathbf{Q}$, tel que $q \neq 0$, q est inversible, d'inverse $\dfrac{1}{q}$. C'est donc un corps.
2. A l'inverse (oh que c'est rigolo !...), les éléments de $\mathbf{Z}$ différent de 1 et de -1 ne sont pas inversibles (en effet, quelque $x \in \mathbf{Z} \setminus \{1;-1;0\}$, $\dfrac{1}{x} \notin \mathbf{Z}$). Donc non.

11.2.2 Partie exercices

Solution exercice 2.10

Se fait sans difficulté, en utilisant la troisième caractérisation des sous-groupes. On remarquera en particulier que Z est effectivement non vide puisque $e \in Z$.

Solution exercice 2.11

Idem, comme sous-groupe de $(\mathbf{C}, \times)$, qui est un groupe de référence. C'est fois-ci, l'élément neutre est 1.

À noter que ce groupe est le groupe dit des racines de l'unité.

Solution exercice 2.12

Il faut donc montrer que G est commutatif, c'est à dire que pour tout $(x, y) \in G^2, x \star y = y \star x$.

Remarquons au préalable que la définition de G implique que tout élément est son propre inverse (puisque $\forall x \in G, x \star x = 1$, d'où le résultat par unicité de l'inverse).

Soit donc $(x, y) \in G^2$. Montrons que $x \star y = y \star x$.

Or : $(x \star y) \star (y \star x) = x \star (y \star y) \star x = x \star 1 \star x = x \star x = 1$.

Donc : $(y \star x) = (x \star y)^{-1}$.

Or : $x \in G$, $y \in G$ donc $x \star y \in G$.

Donc $(x \star y)^{-1} = (x \star y)$.

D'où : $y \star x = x \star y$. Donc G est bien commutatif.

Solution exercice 2.13 Vérifions les 4 points de la définition de groupe.

1. $\star$ Pour $(x, y) \in G^2$, $-1 < x < 1$ i.e $|x| < 1$ et de même $|y| < 1$.

   Donc : $|xy| < |y|$ donc $|xy| < 1$ i.e. $-1 < xy < 1$.

   D'où $0 < 1 + xy < 2$.

   $\star$ La suite est astucieuse, attention les yeux !

   Pour ne pas perdre le lecteur, j'ai reproduit ci-après une démarche de recherche au brouillon. Sur une copie, il faudrait recopier cela dans "l'autre sens".

   On veut $x \star y \in G$ i.e. $-1 < \dfrac{x+y}{1+xy} < 1$.

   Or : $1 + xy > 0$ (on vient de le montrer). D'où :

   $-1 < \dfrac{x+y}{1+xy} < 1 \Leftrightarrow -(1+xy) < x+y < 1+xy \Leftrightarrow |x+y| < 1+xy \Leftrightarrow (x+y)^2 < (1+xy)^2$, ce qui est vrai car la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

   L'astuce est là, dans la mise au carré. Pourquoi cette idée ? C'est en développant un carré que l'on peut faire apparaître le produit xy en partant d'une somme $x + y$: des choses devraient donc pouvoir se simplifier.

   D'où : $-1 < \dfrac{x+y}{1+xy} < 1 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 < 1 + 2xy + x^2y^2 \Leftrightarrow x^2 - x^2y^2 < 1 - y^2 \Leftrightarrow x^2(1-y^2) < 1 - y^2$.

   Or : $-1 < y < 1$ donc $y^2 < 1$ donc $1 - y^2 > 0$.

   D'où : $-1 < \dfrac{x+y}{1+xy} < 1 \Leftrightarrow x^2 < \dfrac{1-y^2}{1-y^2} \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \Leftrightarrow x \in G$, ce qui est dans notre hypothèse de départ, donc c'est gagné !

   (*Sur une copie, on peut commencer ainsi le raisonnement :* $(x, y) \in G^2 \Rightarrow -1 < x < 1 \Leftrightarrow x^2 < 1 \ldots$)

2. Les points 2, 3, 4 se vérifient sans effort autre que calculatoire (élément neutre : 0 ; symétrique de x : $-x$.)

Solution exercice 2.14

1. Utiliser la troisième caractérisation des sous-groupes. On montre facilement que $e \in A \cap B$ pour justifie que l'intersection est non vide. Je vous rappelle que : $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ et $x \in B$ (en particulier, si un élément est dans l'intersection, alors il est dans A...).

2. $\Leftarrow$ évident : si par exemple $A \subset B$, alors $A \cup B = A$ qui est un sous groupe de G. Idem dans le cas où $B \subset A$.

   $\Rightarrow$ Procédons par disjonction de cas.

   Premier cas : $B \subset A$. Dans ce cas, c'est fini !

   Deuxième cas : $B \nsubseteq A$. Cela signifie qu'il existe $x \in B$ tel que $x \notin A$. Montrons que $A \subset B$, c'est à dire que pour tout $a \in A$, $a \in B$.

   Soit donc $a \in A$. Montrons que $a \in B$.

   Note au lecteur : essaie de finir l'exercice par toi-même sans lire la suite à partir d'ici ! Le plus dur est passé.

   Or, si $a \in A$ et $x \in B$, alors $(a, x) \in (A \cup B)^2$. Donc, d'après la caractérisation des sous groupes, $a.x^{-1} \in A \cup B$.

   Or : $a.x^{-1} \notin A$. En effet, si c'était le cas, alors $a^{-1}.a.x^{-1} = e.x^{-1} = x^{-1}$ appartiendrait à A et par extension, $x \in A$, ce qui est faux.

   Or : si $a.x^{-1} \in A \cup B$ et $a.x^{-1} \notin A$ alors $a.x^{-1} \in B$.

   Donc : $a.x^{-1}.x = a \in B$.

   D'où la conclusion.

Solution exercice 2.15 Sans grande difficulté autre que calculatoire. L'élément neutre pour l'addition est $(0;0)$ et celui pour la multiplication est $(1;0)$. A noter que si l'on note $X = x + y\sqrt{3}$ et $Y = x' + y'\sqrt{3}$ deux éléments de B, les additionner et les multiplier revient simplement à faire $X + Y = x + y\sqrt{3} + ...$ et $XY = (x + y\sqrt{3})(...)$.

Solution exercice 2.16

1. On développe à droite, en abusant du fait que A est commutatif donc que $a \times b = b \times a$.
2. Facile, en calculant $1 = 1^n - a^n$ avec la formule précédente.

Solution exercice 2.17 Remarquons que l'on peut déduire des deux égalités que $1_A = a^2 + a^2 = 2a^2$ et que $a = 2a^3$. A priori inutile mais néanmoins sympathique.

1. Rappelons à toute fin utile que dans un anneau, l'addition est toujours commutative.
   $a^2.b + a.b.a = a.(ab + b.a) = a.1_A = a$. De même, $b.a^2 + a.b.a = a$. D'où $a^2.b = b.a^2$.
   De plus, $a.b.a = a(1 - a.b) = a - a^2.b = a^2.b + b^2.a - a^2.b = b^2.a$.
2. **Attention, comme A n'est a priori pas commutatif, on ne peut pas utiliser les identités remarquables ! En effet, a priori, $a.b \neq b.a$.**
   D'une part : $(1 - b.a)^2 = (a.b)^2 = (a.b).(a.b) = (a.b.a).b = (a^2.b).b = a^2.b^2$.
   D'autre part : $(1 - b.a)^2 = (1 - b.a)(1 - b.a) = 1 - b.a - b.a + (b.a).(b.a) = 1 - 2b.a + b.(a.b.a) = 1 - 2b.a + b^2.a^2$.
   D'où : $1 - 2b.a + b^2a^2 = a^2b^2$ i.e $1 = 2a.b + a^2b^2 - b^2.a^2$.
   Or : ce que l'on veut montrer, c'est que $2b$ est l'inverse de a, c'est à dire que $1 = 2a.b$.
   Bref, ce serait cool si $a^2b^2 - b^2.a^2 = 0_A$, c'est à dire si $a^2b^2 = b^2a^2$.
   Or : $b^2.a^2 = b.(b.a^2) = b.(a^2.b) = (b.a^2).b = (a^2.b).b = a^2.b^2$.
   Donc : $1 = 2ab$.
   D'où la conclusion.

11.3 Suites usuelles

11.3.1 Rappel sur les suites arithmétiques et géométriques

11.3.2 Suites arithmético-géométriques

11.3.3 Suites vérifiant une relation du type $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

11.4 Quelques fonctions usuelles...

11.4.1 Sur les fonctions de référence

Solution exercice 4.1

1. (a) Car $x^2 \geqslant 0$ pour tout réel x.
   (b) Soit $y \in [1; +\infty[$. Alors $y - 1 \geqslant 0$. Donc : notons x le réel tel que $x = \sqrt{y-1}$. Alors $x^2 = y - 1$ i.e. $y = x^2 + 1$. Donc : x est un antécédent de y par f (le second étant $-x$).
   (c) Non. En effet, 0 n'admet aucun antécédent réel par f.
2. On dérive !
3. Pour $x \in [0; +\infty[$, $g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1 - 1} = \sqrt{x^2} = x^2$ car $x \geqslant 0$.
4. Même calcul.

Solution exercice 4.2 Bien suivre les consignes et tout se passe bien.

Solution exercice 4.3

1. D'après l'exercice précédent, $\ln(1/a) + \ln(a) = \ln(a * 1/a) = \ln(1) = 0$ d'où le résultat.
2. $\ln(a/b) = \ln(a \times 1/b) = \ln(a) + \ln(1/b)$ et on conclut avec ce que l'on connaît.
3. se fait par récurrence.
4. soit $m \in \mathbf{Z}$. Si $m \in \mathbf{N}$, c'est déjà fait à la 3. Si $m \in \mathbf{Z}$, $m < 0$, alors :
   $\ln(a^m) = \ln\left(\dfrac{1}{a^{|m|}}\right) = -\ln\left(a^{|m|}\right) = -|m|\ln(a) = m\ln(a)$.

Solution exercice 4.4

1. On dérive...
2. (a) pour $a > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n\ln(a) = ...$
   (b) Poser $y = \dfrac{1}{x}$ et regarder $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x)$ en remplaçant x par son expression en fonction de y.
3. C'est la définition : elle est strictement croissante de $]0; +\infty[$ dans $\mathbf{R}$, donc elle réalise la bijection souhaitée.

Solution exercice 4.5

1. Elle réalise une bijection comme fonction réciproque de ln. Comme ln :$]0;+\infty[\to \mathbf{R}$, on en déduit que $exp : \mathbf{R} \to]0;+\infty[$. En particulier, pour tout réel x, $exp(x)$ est défini et $exp(x) > 0$.
2. Pour tout réel x, $\exp'(x) = \dfrac{1}{\ln'(\exp(x))} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\exp(x)}} = \exp(x)$.
3. Voir cours de TS :)

Solution exercice 4.6

1. $\exp(0) = \exp(\ln(1)) = 1$ car exp est la fonction réciproque de ln.
2. $\ln(\exp(a)\exp(b)) = \ln(\exp(a)) + \ln(\exp(b)) = a + b$. D'où la conclusion en passant à l'exponentielle.
3. Calculer $\exp(-a)\exp(a)$.
4. Immédiat, avec les deux propositions précédentes.
5. $\ln(exp(ma)) = ma$ et $\ln(exp(a)^m) = m\ln(exp(a)) = ma$. Ainsi, $\ln(exp(ma)) = \ln(exp(a)^m)$. D'où la conclusion en passant à l'exponentielle.

Solution exercice 4.7 $\exp(n\ln(x)) = \exp(\ln(x^n)) = x^n$.

Solution exercice 4.8

A faire à l'aide de géogébra par exemple, en définissant un curseur a allant de -5 à 5 et un pas de $0,1$ par exemple.

Solution exercice 4.9

1. $x^0 = e^{0\times\ln(x)} = e^0 = 1$
2. Les propriétés suivantes sont des conséquences directes des relations algébriques vérifiées par la loi exponentielle. Par exemple $(xy)^a = e^{a\ln(xy)} = e^{a\ln(x)+a\ln(y)} = e^{a\ln(x)}e^{a\ln(y)} = (e^{\ln(x)})^a(e^{\ln(y)})^a = x^a y^a$.
   De même, $(x^a)^b = e^{b\ln(x^a)} = e^{b\ln(e^{a\ln(x)}} = e^{ba\ln(x)} = e^{ab\ln(x)} = x^{ab}$

Solution exercice 4.10 Pour $a \in \mathbf{R}$, f'_a est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour $x \in]0;+\infty[$:
$f'_a(x) = a \times \dfrac{1}{x} \times e^{a\ln(x)} = a \times \dfrac{1}{x} \times x^a = a \times x^{a-1}$.

Solution exercice 4.11

1. (a) g est croissante jusque 1 puis décroissante. On trouve un maximum de -2 donc toujours négative.
   (b) $g(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \leqslant 2\sqrt{x}$ d'où le résultat en divisant par $x > 0$.
   (c) Avec le théorème des gendarmes.
2. (a) Pour $x > 0$, avec $c = a/b$: $\dfrac{\ln(x)^b}{x^a} = \left(\dfrac{\ln(x)}{x^{a/b}}\right)^b = \left(\dfrac{\ln(x)}{x^c}\right)^b =$
   $$\left(\frac{\frac{1}{c}\ln(x^c)}{x^c}\right)^b = \frac{1}{c^b} \times \left(\frac{\ln(x^c)}{x^c}\right)^b = \frac{1}{c^b} \times \left(\frac{\ln(X)}{X}\right)^b \text{ avec } X = x^c.$$
   Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln(X)}{X} = 0$. D'où le résultat.
   (b) L'idée est de se ramener à la limite précédente. Une bonne astuce est donc de poser $X = \dfrac{1}{x}$ qui aura le mérite de tendre vers $+\infty$ quand x tendra vers 0^+.
   (c) Astuce donnée puis après un ou deux calculs se ramener à la question 1. Même principe qu'à l'antépénultième question pour la deuxième limite

Solution exercice 4.12

Se fait facilement, en remplaçant $e^{i\theta}$ par sa définition et en n'oubliant pas que $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ et que $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$.

Solution exercice 4.13

1. Les deux premières questions se font sans difficulté. La troisième se fait en étudiant les variations de ch ($\text{sh}(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{-x} \Leftrightarrow \dfrac{e^x}{e^{-x}} > 1 \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow \ldots x > 0$), dont le minimum est atteint pour $x = 0$ (et donc vaut $\text{ch}(0) = 1$).
2. Sans difficulté particulière.
3. Remarquons que pour tout réel x, on a $th(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ en simplifiant par 2 au numérateur et au dénominateur.
   Les deux premières se font sans difficulté. Pour la troisième, il faut déterminer le tableau de variations complet de cette fonction. On doit trouver qu'elle est strictement croissante, de limite -1 en $-\infty$ (il faut factoriser par e^{-x} pour la trouver) et $+1$ en $+\infty$ (il faut factoriser par e^x pour la trouver), ce qui correspond à ce qu'on devait démontrer.
4. Faites le à la calculatrice.

5. Les deux résultats se montrent sans grande difficulté, en faisant attention à développer correctement (attention aux identités remarquables pour la première relation ! Rappelons également que $\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2^2} = \frac{x^2}{4}$).

Solution exercice 4.14

Remarquons que les solutions doivent être strictement positives.

$$\begin{cases} x+y &= 10 \\ \ln(x)+\ln(y) &= 3\ln(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y &= 10 \\ \ln(xy) &= \ln(2^3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 10-y \\ xy &= 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 10-y \\ y(10-y) &= 8 \end{cases}$$

Or : $y(10-y) = 8 \Leftrightarrow -y^2+10y-8 = 0$. On note Δ le discriminant du trinôme $-y^2+10y-8$.

$\Delta = 10^2 - 4\times(-1)\times(-8) = 100-32 = 68 > 0$ donc deux racines réelles $y_1 = \frac{-10-\sqrt{68}}{2\times(-1)} = 5+\sqrt{17}$ et $y_2 = 5-\sqrt{17}$.

Comme $y_1 > 0$ et $y_2 > 0$, les solutions conviennent pour y.

On aurait donc deux solutions pour x : $x_1 = 10-y_1 = 5-\sqrt{17}$ et $x_2 = 10-y_2 = 5+\sqrt{17}$.

Les deux couples solutions sont donc : $(5-\sqrt{17}; 5+\sqrt{17})$ et $(5+\sqrt{17}; 5-\sqrt{17})$.

Solution exercice 4.15

Astuce : il faut commencer par regrouper les 3^{2x} d'un côté et les 2^x de l'autre. Factoriser pour diviser ensuite, pour ensuite passer au ln.

On trouve ainsi $x = \frac{\ln\left(\frac{27\sqrt{2}}{4}\right)}{\ln\left(\frac{9}{2}\right)}$, ce qui, après simplification, donne le résultat annoncé (si, si ! Calculez donc $\left(\frac{9}{2}\right)^{3/2}$ pour voir.

Voici la résolution détaillée.

$3^{2x} - 2^{x+1/2} = 2^{x+7/2} - 3^{2x-1} \Leftrightarrow 3^{2x-1}(3+1) = 2^{x+1/2}(1+2^{6/2}) \Leftrightarrow 4\times 3^{2x-1} = 9\times 2^{x+1/2} \Leftrightarrow 3^{2x-3} = 2^{x-3/2} \Leftrightarrow \ln(3^{2x-3}) = \ln(2^{x-3/2}) \Leftrightarrow (2x-3)\ln(3) = (x-1,5)\ln(2) \Leftrightarrow x(2\ln(3)-\ln(2)) = 3\ln(3)-1,5\ln(2) \Leftrightarrow x = \frac{3\ln(3)-1,5\ln(2)}{2\ln(3)-\ln(2)} = 1,5\frac{2\ln(3)-\ln(2)}{2\ln(3)-\ln(2)} = 1,5.$

Solution exercice 4.16 Il faut transformer tous les $\sqrt{x}$ en $x^{1/2}$ puis diviser l'un par l'autre (possible car $x > 0$.

On arrive à $\frac{x^{x/2}}{x^{x^{1/2}}} = 1$ soit $x^{x/2-x^{1/2}} = x^0$. Par identification des puissances, on a alors $x/2 - x^{1/2} = 0$, soit en divisant par $x^{1/2}$, un résultat finalement pas si loin du résultat annoncé.

Solution exercice 4.17

$2^x > x^2 \Leftrightarrow x\ln(2) \geqslant 2\ln(x)$ car ... $\Leftrightarrow x\ln(2) - 2\ln(x) \geqslant 0$.

Notons $f : x \mapsto x\ln(2) - 2\ln(x)$, définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ (opérations de bases sur des fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$). Pour $x > 0$, $f'(x) = \ln(2) - \frac{2}{x}$ donc $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{\ln(2)}$. On en déduit le tableau de variations suivants, les limites étant laissées à l'appréciation du lecteur :

x	0		$2/\ln(2) \approx 2,89$		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$	$+\infty$			$+\infty$
	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	
	$\Vert$		$f(2/\ln(2)) \approx -0,12$		

Or : $f(2) = f(4) = 0$. Cela et le tableau de variations nous permettent de conclure que l'ensemble de solutions SUR $]0;+\infty[$ est $]0;2] \cup [4;+\infty[$.

Solution exercice 4.18

Pour $1 > x > 0$, $\frac{\sin(x\ln(x))}{x} = \frac{\sin(x\ln(x))}{x\ln(x)}\ln(x) = \frac{\sin(X)}{X}\ln(x)$, avec $X = x\ln(x)$.

Or, quand $x \to 0^+$, $X \to 0$ (limite de référence).

De plus, $\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t} = 1$ et $\lim_{t\to 0^+}\ln(t) = -\infty$.

On en déduit que $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x\ln(x))}{x} = -\infty$.

Solution exercice 4.19

⋆ Remarquons que la première égalité implique que $x \geqslant 1$, puisque le minimum de ch est 1.

⋆ En démontrant l'égalité proposée par l'énoncé, on obtient les systèmes successifs suivants :

$$\begin{cases} x &= 2ch(y)^2-1 \\ x^3 &= ch(y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 2x^3-1 \\ x^3 &= ch(y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3-x-1 &= 0 \\ ch(y) &= x^{3/2} \end{cases}$$

⋆ Pour résoudre la première équation qui peut sembler alambiquée, rien ne vaut un bon vieux TVI ! Cela permettre de déterminer le nombre de solutions et l'on pourra s'aider de la calculatrice pour conclure.

Soit donc $\phi : [1;+\infty[\to +\infty, x \mapsto 2x^3 - x - 1$ (on considère l'intervalle $[1;+\infty[$ car $x \geqslant 1$.

Note au lecteur : à partir d'ici, cela revient à chercher les antécédents de 0 *par* ϕ *en s'appuyant sur un raisonnement proche du TVI. Essayez donc de recommencer l'exercice !*

On calcule la dérivée et on montre que $\phi'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 \geqslant 1/6$, ce qui est vrai vu que $x \geqslant 1$.

Donc ϕ est strictement croissante.

Or : $\phi(1) = 0$.

Donc, si $x \geqslant 1$, $2x^3 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

On en déduit sans difficulté que $y = 0$ grâce à la deuxième égalité et grâce au tableau de variations de la fonction ch.

Solution exercice 4.20

1. Un classique du taux d'accroissement ! $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{sh(t)}{t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{sh(t) - sh(0)}{t - 0} = sh'(0) = ch(0) = 1$.
2. On calcule des deux côtés en se ramenant à exponentielle, et ça marche !
3. Voir ligne précédente.
4. En suivant l'astuce et en utilisant la relation précédente, on parvient à $2\text{ch}\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\text{ch}\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$. Et bien sûr en utilisant l'imparité du sinus hyperbolique.

11.4.2 Sur les notions d'injectivité et de surjectivité

Solution exercice 4.21

Il faut prendre les éléments de la gauche vers la droite.

Soit $x \in [3;7]$. On va alors calculer $f(x)$ puis $g(f(x))$ pour obtenir $g \circ f(x)$.

Donc : $g \circ f : x \mapsto 2\sqrt{f(x)}$ soit $g \circ f : x \mapsto 2\sqrt{2x^2 + 4}$.

L'ensemble de départ [1] est $[3;7]$ et l'ensemble d'arrivée est $\mathbf{R}$.

Solution exercice 4.22 question de cours

Solution exercice 4.23

1. Supposons $g \circ f$ injective. Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. Donc : $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ c'est à dire $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$. Comme $g \circ f$ est injective, alors $x_1 = x_2$.
   Donc : $f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$. D'après la caractérisation de l'injectivité, f est injective.
2. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt{x}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. f n'est pas surjective mais $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ x \mapsto \sqrt{x^2} = |x|$ l'est.

Solution exercice 4.24

Il faut montrer que la fonction est strictement monotone, ce qui se fait bien en dérivant puis en étudiant le signe de la dérivée.

La dérivée peut être simplifiée si l'on remarque que pour tout réel x, $f(x) = e^{2x} + 2e^x$.

Sa fonction réciproque est $g :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(-1 + \sqrt{1+y})$.

Solution exercice 4.25

1. Supposons $g \circ f$ injective et f surjective. Soit $(a, b) \in F^2$ tels que $g(a) = g(b)$. Comme f est surjective, il existe $(x_a, x_b) \in E^2$ tel que $f(x_a) = f(x_b)$.
   Donc $g(a) = g(b) \Leftrightarrow g(f(x_a)) = g(f(x_b)) \Leftrightarrow g \circ f(x_a) = g \circ f(x_b) \Leftrightarrow x_a = x_b$ car $g \circ f$ est injective.
   Donc, d'après la caractérisation de l'injectivité, g est bien injective.
2. Supposons $g \circ f$ surjective et g injective. Soit $y \in F$. Le but est de montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
   Comme $y \in F$, il existe $z \in G$ tel que $g(y) = z$.
   Or, $z \in G$ donc comme $g \circ f : E \to G$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x) = g(f(x))$.
   Ainsi, $g(y) = g(f(x))$. Comme g est injective, $y = f(x)$. Ceci valant pour tout y de F, on en déduit que f est bien surjective.

Solution exercice 4.26

- Montrons que p injective $\to p$ surjective. Supposons donc p injective.
  Soit $y \in E$. Alors : $p(y) = p \circ p(y) = p(p(y))$. Comme p est injective, $y = p(y)$.
  Donc, comme $y \in E$, p est bien surjective.
- Montrons que p surjective $\Rightarrow \forall x \in E, p(x) = x$. Supposons donc p surjective.
  Soit $y \in E$. Comme E est l'espace d'arrivée et que p est surjective, il existe $x \in E$ tel que $p(x) = y$. Donc : $p(y) = p(p(x)) = p \circ p(x) = p(x) = y$ i.e. pour tout y de E, $p(y) = y$.
- Montrons que $\forall x \in E, p(x) = x \Rightarrow p$ injective.
  Soit $(a, b) \in E^2$ tels que $p(a) = p(b)$. Alors $a = b$ et donc p est bien injective.
- En conclusion : p injective $\Rightarrow p$ surjective $\Rightarrow \forall x \in E, p(x) = x \Rightarrow p$ injective, ce qui permet de conclure.

Solution exercice 4.27

1. On part de $x \in [3;7]$, on arrive avec $f(x)$ dans $\mathbf{R}_+$, et on repart dans $\mathbf{R}$ avec $g(f(x))$. Globalement, on est donc parti de $[3;7]$ pour arriver dans $\mathbf{R}$.

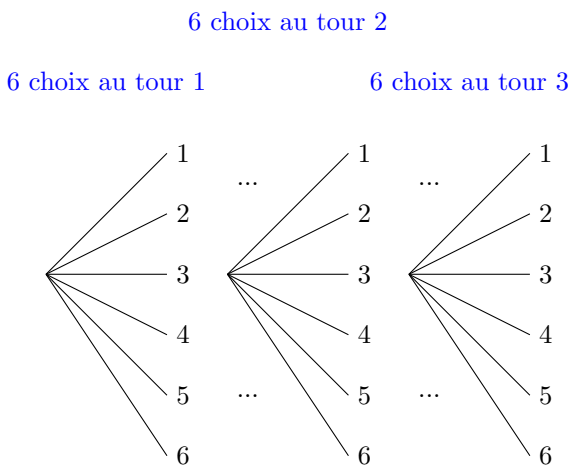
1. Négation de P_1 : il existe deux sous-ensembles A et B de E tels que $f(A \cap B) = \varnothing$ et $f(A) \cap f(B) \neq \varnothing$. Négation de P_2 : f n'est pas injective.
2. Rappelons que $P_1 \Leftrightarrow P_2$ si et seulement si non$P_1 \leftrightarrow$ nonP_2, où nonP_1 est la négation de P_1 (c'est le principe de la démonstration par contraposée). L'énoncé (pas simple, il faut le reconnaître - mieux vaut commencer par P_2) nous incite à démontrer plutôt cette deuxième équivalence.
   - Montrer que non$P_1 \Rightarrow$ nonP_2. Soit donc A et B deux sous-ensembles de E tel que $f(A \cap B) = \varnothing$ et $f(A) \cap f(B) \neq \varnothing$.
     Prenons $z \in f(A) \cap f(B)$. Comme $z \in f(A), \exists a \in A : f(a) = z$. De même : $\exists b \in B : f(b) = z$.
     Or, si $a = b$, alors $a \in A \cap B$ et $z = f(a) \in f(A \cap B) = \varnothing$, ce qui est impossible.
     Donc $a \neq b$.
     Ainsi, il existe $(a, b) \in E^2$ tels que $a \neq b$ et $f(a) = f(b)$. Donc, d'après la contraposée de la caractérisation de l'injectivité, f n'est pas injective.
   - Réciproquement, supposons que f ne soit pas injective. Le but de la question est de trouver deux sous-ensembles A et B de E tel que $f(A \cap B) = \varnothing$ et $f(A) \cap f(B) \neq \varnothing$.
     Comme f n'est pas injective, il existe $(a, b) \in E^2$, $a \neq b$. tels que $f(a) = f(b)$. Posons $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$. alors $f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing$ et $f(A) \cap f(B) = f(a) \neq \varnothing$. Donc non$P_1$ est vraie.
   - Conclusion : non $P_1 \Leftrightarrow$ non P_2 et donc $P_1 \Leftrightarrow P_2$.

11.5 Initiation au dénombrement

11.5.1 Partie cours

Solution exercice 5.1

1. $card(E) = 6$.
2. $(1; 3; 5)$ par exemple ; $(2; 2; 4)$ si on ne veut pas les prendre tous distincts.
3. Pour le premier chiffre, nous avons 6 possibilités ; pour le second chiffre, nous avons également 6 possibilités ; pour le troisième chiffre, nous avons de nouveau 6 possibilités.
   On a donc $6 \times 6 \times 6 = 6^3$ possibilités pour les $3-$listes de E.
   On peut se représenter les possibilités avec un arbre des possibles les ... se substituent aux morceaux d'arbres identiques) :



   Le nombre recherché est alors le nombre de chemins sur l'arbre.

Solution exercice 5.2

Pour chacun des $x_1, \ldots, x_p$ terme de la liste, on a n possibilités.
Donc un total de $n \times n \ldots \times n$ p fois, soit n^p.

Solution exercice 5.3

Il y a 8 possibilités pour le premier cheval, 7 pour le second et 6 pour le troisième.
Il y a donc un total de $A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$ combinaisons possibles.

Solution exercice 5.4

On a n choix pour le 1er élément de la liste, $n - 1$ pour le 2nd (puisqu'on ne reprend pas le premier), $n - 2$ pour le 3ème (puisqu'on ne reprend ni le premier, ni le deuxième),..., $n - (p - 1) = n - p + 1$ pour le $p^{\text{ième}}$ (puisqu'on ne reprend aucun des $p - 1$ précédents).
Donc : $A_n^p = n \times (n - 1) \times \ldots \times (n - p + 1)$.

Solution exercice 5.5

1. On a 6 possibilités pour la 1ère carte, 5 pour la seconde (puisque l'on ne reprend pas la 1ère), ..., 1 pour la sixième (les 5 autres étant déjà prises).
   Soit $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

2. De même, on a $42! \approx 1.4 \times 10^{51}$ possibilités.

Solution exercice 5.6

Il faut bien comprendre qu'une permutation est un arrangement de taille n.
Le nombre de possibilités est donc $A_n^n = n!$.

Solution exercice 5.7

- Notons x le nombre de mains cherché.
- Si l'ordre du tirage avait une importance[2], on serait dans le cadre d'un tirage sans remise. On aurait donc $6 \times 5 \times 4 = 120$ mains possibles.
- Mais l'ordre n'a pas d'importance !
  Ainsi(voir note en bas de page pour les notations), les combinaisons (EF,PF,PG),(EF,PG,PF),(PF,EF,PG)... bref les $3! = 6$ combinaisons constituées de PF,EF et PG donnent un même résultat.
  Synthétisons cela. Il y a, avec l'ordre :
  $$\left.\begin{array}{r} 3!\text{combinaisons avec EF, PF et PG ;} \\ 3!\text{combinaisons avec EG, EF et PG ;} \\ 3!\text{combinaisons avec EG, EF et PF ;} \\ \ldots 3!\text{combinaisons avec EG, EF et CPEF ;} \end{array}\right\} \text{et cela pour chacune des } x \text{ combinaisons non ordonnées.}$$
  Ainsi, $3! \times x = 6 \times 5 \times 4$.
- Le nombre cherché est donc $x = \dfrac{6 \times 5 \times 4}{3!} = 20$.

Solution exercice 5.8

Dans un jeu de 52 cartes, on a "5 parmi 42", soit $\binom{52}{5} = 2598960$ manières différentes de piocher 5 cartes simultanément (sans remise).

Solution exercice 5.9

Reprendre la démarche de l'avant dernier exercice.
On a donc $p!x = n \times \ldots \times (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.
Donc : $x = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Solution exercice 5.10

1. 6^6, chacun des 6 dés pouvant sortir une des 6 combinaisons.
2. Il y a 6 choix pour le premier dé, 5 pour le second, ..., 1 pour le dernier.
   Ce sont donc les permutations dans notre ensemble à 6 éléments : il y en a 6!.
3. Les dés étant équilibrés, on est dans une situation d'équiprobabilité.
   La probabilité cherchée vaut donc $\dfrac{6!}{6^6} = \dfrac{5}{324} \approx 0,015$.

Solution exercice 5.11

1. On a 5 choix parmi 49 pour la première grille et 1 choix parmi 10 pour la 2nde.
   On a donc un total de $\binom{49}{5} \times \binom{10}{1} = 19068840$ grilles possibles.
2. $19068840/52 \approx 366708$ années environ. Bonne chance !
3. Si l'on suppose que le choix s'effectue au hasard, la probabilité de victoire est donc $\dfrac{1}{19068840} \approx 5.10^{-8}$.

Solution exercice 5.12

1. $\binom{5}{4}$ est le nombre de parties à 4 éléments d'un ensemble à 5 éléments.
   C'est donc en particulier le nombre de chemins à 4 succès parmi les 5 répétitions.
2. Un tel chemin passe par 4 succès ayant chacun pour probabilité $\dfrac{7}{10} = 0,7$ et par $5 - 4 = 1$ échec de probabilité $1 - 0,7 = 0,3$.
   D'après le principe de construction des arbres pondérés, la probabilité d'un tel chemin est donc $0,7^4 \times 0,3^1$.
3. La probabilité de tirer exactement 4 boules vertes est donc $\binom{5}{4} \times 0,7^4 \times 0,3^1$, étant donné qu'il faut dénombrer l'ensemble des chemins réalisant l'événement.

Solution exercice 5.13

C'est exactement le même principe que l'exemple précédent.

Solution exercice 5.14

2. c'est à dire si (Élève Fille, Prof, Prof Garçon) était un tirage différent de (Prof Fille(=PF), Élève Fille(=EF), Prof Garçon(=PG))

1. Tree or not tree, that's your choice !
2. Dans le cadre d'un tirage sans remise, on utilise les coefficients binomiaux.
   Donc ici $\binom{10}{5}$.
3. On va prendre 4 boules parmi les 7 vertes et $5-4=1$ boule parmi les 3 rouges. D'où le résultat.
4. La probabilité est donc ... celle donnée dans la remarque suivante dans le cours =D

11.5.2 Partie Exercices

Solution exercice 5.15

Johanne a $A_8^5 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$ possibilités.

Solution exercice 5.16

Il y a 5 possibilités pour la première lettre, 4 pour la seconde, 3 pour la deuxième, 2 pour la quatrième et 1 pour la dernière.

Il y a donc $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120!$ anagrammes du mot MATHS.

Sinon, on pouvait répondre directement en disant qu'un anagramme de MATHS n'est jamais qu'une permutation[3] des 5 lettres M,A,T,H,S et qu'il y en a donc 5! d'après la proposition de la partie 3.

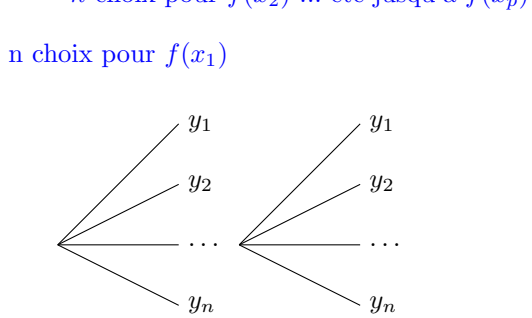
Solution exercice 5.17

1. Si l'on fixe la première lettre, cela ne laisse plus que 4 lettres que l'on peut permuter. Il n'y a donc plus que $4! = 24$ possibilités.
2. Les voyelles de "PHYSIQUE" sont Y,I,U,E. On a donc le choix parmi 4 lettres pour la première lettre de l'anagramme.
   Les consonnes de "PHYSIQUE" sont P,H,S,Q. On a donc le choix parmi 4 lettres pour la dernière lettre de l'anagramme.
   Sur les 8 lettres disponibles, 2 sont déjà fixées : il nous en reste donc 6 parmi lesquelles ont peut faire des permutations.
   Le nombre total d'anagrammes de "PHYSIQUE" commençant par une voyelle et finissant par une consonne est donc $4 \times 4 \times 6! = 5760$.

Solution exercice 5.18

Notons $E = \{x_1, \dots x_p\}$ et $F = \{y_1, \dots, y_n\}$.

1. Soit $f : E \mapsto F$.
   Alors $f(x_1) = y_1$ ou $f(x_1) = y_2$ ou $\dots f(x_1) = y_n$. Il y a donc n possibilités pour $f(x_1)$.
   Il y a ainsi n possibilités pour les p images de $x_1, \dots, x_p$.
   Il y a donc $n \times \dots \times n = n^p$ possibilités.



2. Reprenons les notations précédentes.
   Pour la première image, n possibilités. Puis $n-1$ pour la suivante, étant donné que toutes les images sont différentes à cause de l'injectivité de la fonction.
   Puis $n-2$ pour celle d'après.
   etc
   Pour enfin $n-(p-1) = n-p+1$ pour la dernière (la $p^{\text{ième}}$).
   Soit $n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1) = A_n^p$ possibilités pour les applications.
3. C'est exactement le même principe qu'avant, si ce n'est qu'il y a n image.
   Donc un total de $n \times (n-1) \times \dots \times (n-n+1) = n \times \dots \times 1 = n!$ applications possibles.

Solution exercice 5.19

1. Il faut prendre 5 cartes de coeur parmi les 13.
   Il y a donc $\binom{13}{5}$ combinaisons.

3. Voyez comme le mot permutation prend tout son sens !

2. (a) La paire est déterminée par la valeur de la carte (13 possibilités) de la paire et le choix de deux couleurs parmi les 4.
   Il faut ensuite choisir les 3 cartes restantes parmi les 12 possibilités de valeurs restantes, sachant que pour chacun de ces cartes les 4 couleurs sont possibles.
   Il y a donc $13 \times \binom{4}{2} \times \binom{12}{3} \times 4^3$ combinaisons.
   (b) Le brelan est déterminée par la valeur de la carte (13 possibilités) du brelan et le choix de trois couleurs parmi les 4.
   Il y a donc $13 \times \binom{4}{3} \times \binom{12}{2} \times 4^2$ combinaisons.
   (c) Le full est la combinaison d'un brelan et d'une paire.
   Le brelan est déterminée par la valeur de la carte (13 possibilités) du brelan et le choix de trois couleurs parmi les 4.
   La paire est déterminée par la valeur de la carte (12 possibilités) de la paire et le choix de deux couleurs parmi les 4.
   Il y a donc $13 \times \binom{4}{3} \times 12\binom{4}{2}$ combinaisons.
   (d) Une quinte flush est de la forme $1, 2, 3, 4, 5$ ou $2, 3, 4, 5, 6$ ou ... ou $10, Valet, Dame, Roi, As$.
   Il y a donc 10 quintes possibles dans chacune des couleurs, soit un total de $4 \times 10 = 40$ combinaisons.
   (e) Pour la quinte standard, les 5 cartes peuvent avoir chacune une couleur différente soit $4^5 \times 10$ combinaisons de base.
   Ce sont donc toutes les combinaisons avec des couleurs différentes, auxquelles il faut retirer les combinaisons de la quinte flush.
   On a donc $4^5 \times 10 - 4 \times 10$ combinaisons.
   (f) On a le choix entre les 4 couleurs.
   Pour chaque couleur, on va choisir $\binom{13}{5}$ cartes, auxquelles il faut retirer les cartes qui se suivent, soit les 10 combinaisons formant les quintes.
   On a donc $4 \times \left(\binom{13}{5} - 10\right)$ combinaisons.
3. Au poker, nous devons choisir 5 cartes parmi 52 pour constituer une main.
   Le choix s'effectuant au hasard, on est dans une situation d'équiprobabilité à chaque fois.
   Pour la paire, la probabilité est donc $p_P = \dfrac{13 \times \binom{4}{2} \times \binom{12}{3} \times 4^3}{\binom{52}{5}} \approx 0,42$.
   On calcule de même les différentes probabilités :
   - pour le brelan, $p_B \approx 0,021$;
   - pour le full, $p_F \approx 0,0014$;
   - pour la quinte flush, $p_{QF} \approx 0,000015\%$.
   - pour la quinte, $p_Q \approx 0,0039\%$.
   - pour la couleur, $p_C \approx 0,0020\%$.
4. Ainsi, $p_P > p_B > p_Q > p_C > p_F > p_{QF}$. Les combinaisons les plus rares sont donc les plus fortes, ce qui semble logique.

Solution exercice 5.20

1. En réalité, il est plus simple de passer par l'événement contraire ici, à savoir aucune personne n'est née le même jour.
   Il s'agit de n tirages sans remise parmi 365 possibilités.
   Le nombre de combinaisons est donc $A_{365}^n = 365 \times 364 \times \ldots \times (365 - n + 1)$.
   Or, le nombre total de combinaisons de date d'anniversaire parmi un groupe de n personnes est 365^n (pour chacune des n personnes, 365 possibilités).
   Comme le choix s'effectue au hasard, on est dans une situation d'équiprobabilité.
   La probabilité qu'aucune personne ne soit née le même jour est donc $p\dfrac{365 \times 364 \times \ldots \times (365 - n + 1)}{365^n}$.
   La probabilité cherchée est donc $1 - p = 1 - \dfrac{A_{365}^n}{365^n}$.
2. Pour 36 élèves, la probabilité (on remplace n par 36) est d'environ $0,83$. Et oui, c'est beaucoup !
3. Pour $n = 56$, on trouve une probabilité d'environ $0,988$. Pour $n = 57$, on trouve une probabilité d'environ $0,990$.
   Donc à partir de 57 personnes ! Et oui, si rapidement !
   Ce qui est amusant par ailleurs, c'est qu'il faudrait 365 personnes pour être sûr à 100% que deux personnes aient la même date d'anniversaire.

Solution exercice 5.21

1. Les deux.
2. Loi hypergéométrique.
3. Loi binomiale.
4. Loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = \dfrac{1}{10}$. Il faut le voir en effet comme le fait de jeter 100 fois une bille.
5. Loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$.
6. Les deux (on doit la notation des coefficients binomiaux à Blaise Pascal).
7. Loi hypergéométrique de paramètres $n = 26$, $m = 5$, $r_1 = 6$ (les voyelles étant A, E, I, O, U, Y).
8. Loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \dfrac{1}{6}$.
9. Loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,01$.
10. Loi hypergéométrique de paramètres $n = 6 + 5 + 7 = 18$, $m = 4$ et $r_1 = 6$.

Solution exercice 5.22

On rappelle que si l'on note X la variable aléatoire comptant le nombre de billes rouges, alors X suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$.

1. $P(X = 2) \approx 0,264$.
2. Piocher au moins 3 boules noires revient à piocher au plus deux boules rouges.
   $P(X \leqslant 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \approx 0,896$.
3. Rappelons qu'en probabilité, le nombre moyen est l'espérance.
   Pour une loi binomiale, l'espérance est le produit des paramètres.
   Donc $E(X) = np = \dfrac{5}{4} = 1,25$.

Solution exercice 5.23

On rappelle que si l'on note Y la variable aléatoire comptant le nombre de voyelles, alors Y suit une loi hypergéométrique de paramètres $n = 26$, $m = 5$, $r_1 = 6$.

1. Si l'on pioche 2 voyelles parmi les 6 existantes, alors on pioche 3 consonnes (parmi les 20 existantes).
   Donc : $P(Y = 2) = \dfrac{\binom{6}{2} \times \binom{20}{3}}{\binom{26}{5}} = \dfrac{855}{3289} \approx 0,260$
2. $P(Y \geqslant 4) = P(Y = 4) + P(Y = 5) = \dfrac{15}{3289} + \dfrac{3}{32890} \approx 0,005$.
3. Réalisons le tableau de la loi de probabilité de Y :

k	0	1	2	3	4	5
$P(Y = k)$	$\dfrac{3876}{16445}$	$\dfrac{2907}{6578}$	$\dfrac{855}{3289}$	$\dfrac{190}{3289}$	$\dfrac{15}{3289}$	$\dfrac{3}{32890}$

   Donc : $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{5} P(Y = k) \approx 1,154$.

   Variante : $E(Y) = m \times \dfrac{r_1}{n} = \dfrac{15}{13} \approx 1,154$.
   En effet, l'espérance dans le cadre d'une loi hypergéométrique est le produit du nombre de répétitions d'expériences par la proportion du caractère étudié.
   À rapprocher du $n \times p$ de la loi binomiale !

11.6 Quelques calculs d'intégrales atypiques

Solution exercice 6.1

Comme $(uv)' = u'v + uv'$, on a par conséquent $u'v = (uv)' - uv'$. D'où le résultat en passant à l'intégrale.

Solution exercice 6.2

Remarque : les différents calculs d'intégrales sont réalisables à la calculatrice ! Cela permet une auto-correction. Par ailleurs, le raisonnement n'est détaillé que pour la première question mais il faudrait évidemment rédiger de même pour les autres.

1. Soit u et v les fonctions définies et dérivables sur $[0;1]$ par $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x^2$. En particulier, pour $x \in [0;1]$, $u(x) = e^x$ et $v'(x) = 2x$. Donc, d'après la formule de l'intégration par parties,
$\displaystyle\int_0^1 e^x x^2 \mathrm{d}x = [e^x \times x^2]_0^1 - \int_0^1 e^x \times 2x\mathrm{d}x = e^1 - 0 - 2\int_0^1 e^x x\mathrm{d}x = e^1 - 2 \times 1$ (d'après l'exemple d'introduction).
Donc : $\displaystyle\int_0^1 e^x x^2 \mathrm{d}x = e^1 - 2$.
2. Poser $u' : x \mapsto 1$ et $v : x \mapsto \ln(x)$. On obtient alors $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\mathrm{d}x = t\ln(t) - t - 1$. Une primitive de ln est donc $F : t \mapsto t\ln(t) - t - 1$.
3. Poser $u' : x \mapsto cos(x)$ et $v : x \mapsto x^2$. Pour calculer ensuite $\displaystyle\int_0^{\pi/2} xsin(x)\mathrm{d}x$, poser $f' : x \mapsto sin(x)$ et $g : x \mapsto x$.
L'intégrale vaut $\dfrac{\pi^2}{4} - 2$.
4. (a) En partant de Iet en faisant deux IIP distinctes, dans lesquelles on prend un u' différent (une fois avec exp, l'autre fois avec sin), on parvient sans grande difficulté à montrer les deux égalités.
Par exemple, posons $u' : x \mapsto e^x$ et $v : x \mapsto \sin(x)$.
Alors $I = integrale0piu'(x)v(x) = [u(x)v(x)]_0^p i - integrale0piu(x)v'(x)dx = [e^x \sin(x)]_0^p i - integrale0pie^x \cos(x)dx = 0 - J = -J$.
De même pour l'autre, avec $u' : x \mapsto \sin(x)$ et $v : x \mapsto e^x$.
Attention, une primitive de sin est $-\cos$ *et non pas cos !!*
   (b) Du coup, le problème se transforme en un système de deux équation à deux inconnues, I et J. Après résolution (on peut aisément la faire par substitution), on obtient $I = \dfrac{e^\pi + 1}{2}$ et $J = \dfrac{-e^\pi - 1}{2}$.
5. $K + L = \pi$ et $K - L = \cdots = \displaystyle\int_0^\pi \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\mathrm{d}x = [\ln(e^x + e^{-x})]_0^\pi = \ln(e^\pi + e^{-\pi}) - \ln(2) = \ln\left(\frac{e^\pi + e^{-\pi}}{2}\right) = \ln((ch(\pi))$.
(voir chapitre précédent pour la définition du cosinus hyperbolique).
D'où, après résolution du système, $K = \dfrac{\pi + \ln(ch(\pi))}{2}$ et $L = \dfrac{\pi - \ln(ch(\pi))}{2}$.

Solution exercice 6.3

Partie A

1. h est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme fonction polynomiale, de dérivée $h' : x \mapsto 3x^2 + 3$.
De même, h' est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme fonction polynomiale, de dérivée $h'' : x \mapsto 6x$. Comme on note $h'' = h^{(2)}$, on en déduit que pour tout réel x, $h^{(2)}(x) = 6x$.
2. par une récurrence immédiate sur $\mathbb{N}$, la dérivée d'exponentielle étant elle-même.

Partie B (*D'après le premier écrit du CAPES de mathématiques, 2016*)

1. $\displaystyle\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t = [f(t)]_a^b = f(b) - f(a)$ donc $f(b) = f(a) + \displaystyle\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t$.
2. Dans l'intégrale de fin de formule de la question, l'idée va être, dans le cadre d'une IPP, d'intégrer le f'' pour faire apparaître le f' et donc de revenir ainsi à la question précédente.
Ainsi, si on note $u : t \mapsto (b - t)$, $v' : t \mapsto f''(t)$ alors $u' : t \mapsto -1$ et $v : t \mapsto f'(t)$ et l'application de la formule de l'IPP nous assure que :
$\displaystyle\int_a^b f''(t)(b-t)\mathrm{d}t = [f'(t)(b-t)]_a^b + \int_a^b f'(t)\mathrm{d}t = f'(b)(b-b) - f'(a)(b-a) + f(b) - f(a) = f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)$,
d'où le résultat souhaité en isolant le $f(b)$.
3. L'emploi de l'étape précédente doit faire penser à une récurrence. Et effectivement une récurrence fonctionne pour cette question.*Cette égalité est la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n.* Voici une version courte.
   - L'initialisation au rang $n = 2$ est la question précédente.
   - Pour l'hérédité, supposons la propriété vraie à un certain rang$n$ fixé, $n \geqslant 2$ et montrons qu'elle reste vraie au rang $n+1$. Or : $\displaystyle\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n\mathrm{d}t = [f^{(n)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}]_a^b + \int_a^b \frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(b-t)^{n-1}\mathrm{d}t = -f^{(n)}\frac{(b-a)^n}{n!} + \int_a^b \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(b-t)^{n-1}\mathrm{d}t$. En utilisant l'hypothèse de récurrence pour remplacer cette dernière intégrale, on parvient, à l'aide d'une démarche similaire à la question précédente, au résultat souhaité. Puis conclusion

Partie C

1. Pour tout $n > 0$, $\displaystyle\int_a^b \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(b-t)dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 e^t(b-t)dt$ (d'après la partie A, $f^{(n)}(t) = exp^{(n)}(t) = exp(t) = e^t$).
Or : $\displaystyle\int_0^1 e^t(b-t)dt$ est un nombre réel (c'est une intégrale sur un intervalle fermé borné d'une fonction continue) et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = 0$. D'où le résultat.

2. $e^1 = f(1) = f(0) + f'(0)(1-0) + f''(0)\dfrac{(1-0)}{2!} + f^{(3)}\dfrac{(1-0)}{3!} + \displaystyle\int_0^1 \dfrac{f^{(4)}(t)(b-t)}{4!}\mathrm{d}t$
$= 1 + 1 + 1 \times \dfrac{1}{2} + 1 \times \dfrac{1}{6} + \displaystyle\int_0^1 \dfrac{f^{(4)}(t)(b-t)}{4!}\mathrm{d}t = \dfrac{8}{3} + \displaystyle\int_0^1 \dfrac{f^{(4)}(t)(b-t)}{4!}\mathrm{d}t$. En négligeant l'intégrale, on peut estimer qu'une valeur approchée de $e^1 = \dfrac{8}{3}$.

   Remarquons qu'avec la calculatrice, $e^1 \approx 2,72$ et $\dfrac{8}{3} \approx 2,67$. Il va de soi qu'en augmentant encore l'ordre, on accroît la précision (qui, à ce stade, est 10^{-1} près). C'est somme toute quelque chose d'aisément programmable sur ordinateur ! Le seul problème de cette formule est l'emploi de $n!$, extrêmement gourmand en mémoire de calculs.

Solution exercice 6.4

Partie A

1. (a) Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{\pi}{4}\cos\left(c + \dfrac{\pi}{4}x\right)$.

   (b) On sait que la tangente en B, soit au point d'abscisse 0, à la courbe de f, est horizontale. Donc : $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{4}\cos(c) = 0 \Leftrightarrow \cos(c) = 0$.
   Or : $c \in [0; \pi/2]$. Donc : $c = \dfrac{\pi}{2}$.

2. De plus, on a les égalités suivantes :
$\begin{cases} f(0) &= 1 \\ f(4) &= 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b\sin(\pi/2) &= 1 \\ a + b\sin(3\pi/2) &= 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b &= 1 \\ a - b &= 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a &= 1 + 3 \\ a - b &= 3 \end{cases} \quad (L_1) \leftarrow (L_1) + (L_2) \quad \Leftrightarrow$
$\begin{cases} a &= 2 \\ b &= a - 3 = -1 \end{cases}$

Partie B

Remarquons que l'expression de la fonction est donnée et correspond aux calculs menés. Yes !

1. Le rayon du cylindre est $OB = 1$. Sa hauteur est $AB = 1$. Son volume est donc $\pi \times 1^2 \times 1 = \pi$.
2. La demi-sphère a pour diamètre $CE = 6$ donc pour rayon $R = 3$.
   Son volume est donc $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{4}{3}\pi \times 3^3 = 2 \times \pi 3^2 = 18\pi$..
3. Le troisième cylindre a pour volume : $\pi \times f(8/5)^2 \times \dfrac{4}{5} = \pi \times (2 - \cos(8/5\pi/4))^2 \times \dfrac{4}{5} \approx 7,19$.
   Pourquoi $f(8/5)$? Parce que chaque cylindre a pour hauteur $\dfrac{4}{5}$. Le rayon du premier cylindre est donc $f(0)$, le rayon du second $f(4/5)$, le rayon du troisième $f(8/5)$.
   La suite du calcul est laissé au lecteur courageux et calculateur.
4. (a) On sait que $2\cos(2x) = 2(\cos(x)^2 - \sin(x)^2)$ d'après les formules de duplications.
   Donc : $\cos(2x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 \Leftrightarrow 2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x) \Leftrightarrow \cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$.

   (b) $I = \displaystyle\int_0^4 f(x)^2\mathrm{d}x = \int_0^4 (2 - \cos(\pi x/4))^2\mathrm{d}x = \int_0^4 4 - 4\cos(x\pi/4) + \cos^2(x\pi/4)\mathrm{d}x = \int_0^4 4 - 4\cos(x\pi/4) + \dfrac{1 + \cos(x\pi/2)}{2}\mathrm{d}x =$
   $\left[4x - \dfrac{16}{\pi}\sin(x\pi/4) + 0,5x + 0,5\dfrac{2}{\pi}\sin(x\pi/2)\right]_0^4 = 16 + 0 + 2 + 0 - [0] = 18$.
   Donc : le volume de la section grisée est 18π.
   On en déduit que le volume total de l'ampoule est $\pi + 18\pi + 18\pi = 37\pi$ unité de volume.

Solution exercice 6.5

Cet exercice n'est pas du tout de moi, ce qui explique qu'il soit très bien fait :)

Suivez pas à pas les étapes et vous arriverez sans sourciller à démontrer les résultats que vous connaissez depuis le collège, à savoir :

- le volume d'un cône est $\dfrac{\text{Aire de la base } \times \text{ hauteur}}{3}$
- le volume d'un pavé droit est $L \times l \times h$.

Solution exercice 6.6

Cet exercice n'est pas du tout de moi, ce qui explique qu'il soit très bien fait :) Pour bien le comprendre, il est en revanche peu ou prou indispensable d'avoir l'exercice précédent et de faire des dessins.

Partie A

L'aire d'un cercle est donné par πR^2. Sur le même modèle que l'exercice précédent, on va sommer les volumes des cylindres de hauteur dx et d'aire à la base $\pi(f(x))^2$.

D'où la formule (on rappelle à toute fin utile que $\int$ signifie "somme").

Partie B

1. C'est un cylindre de rayon 2 et de hauteur 5, de volume $\displaystyle\int_0^5 \pi \times 2^2 = 20\pi$.

2. C'est un cône (la pointe est à l'origine du repère), de volume $\int_0^5 \pi \times x^2 = \left[\frac{\pi}{3}x^3\right]_0^5 = \frac{125\pi}{3}$.
3. C'est une partie d'un cône (la pointe est tronquée), de volume $\pi \int_0^5 4x^2 + 2x + 1\mathrm{d}x = \cdots = \frac{590\pi}{3}$.
4. C'est une sphère de rayon 1. En effet, si $f_4(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$ alors $f_4(x)^2 = 1-(x-1)^2$ soit $(x-1)^2 + f_4(x)^2 = 1$, ce qui est l'équation d'un cercle. En faisant pivoter la courbe de f (un arc de cercle donc) autour de l'axe des abscisses, on obtient donc une sphère.
   Son volume est : $\int_0^1 \pi(1-(x-1)^2)\mathrm{d}x = \pi \int_0^1 (2x - x^2)\mathrm{d}x = \pi \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}$.
5. Son volume est : $\int_1^e \pi \frac{\ln(x)^2}{x}\mathrm{d}x = \pi \left[\frac{1}{3}\ln(x)^3\right]_1^e = \frac{\pi}{3}$

Solution exercice 6.7

1. Voir exemple.
2. En posant $u = sin(x)$, on a alors $du = cos(x)\mathrm{d}x$. De plus, quand $x = \pi/3$, $u = sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ et quand $x = \pi/6$, $u = sin(\pi/6) = 1/2$.
$$\begin{aligned} J &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{cos(x)}{cos^2(x)}\mathrm{d}x \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{cos(x)}{1-sin^2(x)}\mathrm{d}x \\ &= \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{1-u^2}\mathrm{d}u \\ &= \ldots (voir\, exemple) \\ &= [0,5\ln(1+u) - 0,5\ln(1-u)]_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \\ &\approx 0,768 \end{aligned}$$
3. $K = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{(e^x)^2 + e^x} e^x \mathrm{d}x = \int_1^e \frac{u-1}{u^2+u}\mathrm{d}u = \int_1^e \frac{u+1}{u^2+u} - \frac{2}{u(u+1)}\mathrm{d}u = \int_1^e \frac{u+1}{u^2+u} + \frac{2}{u+1} - \frac{2}{u}\mathrm{d}u$
   $= \left[\ln(u^2/2 + u) + 2\ln(u+1) - 2\ln(u)\right]_1^e$
   Le lecteur amoureux de valeurs peut bien évidemment terminer le calcul. :-)
4. Si $u = sin^2(t)$, quand $u = 0$ alors $t = 0$ et quand $u = 1$ alors $t = \frac{\pi}{2}$ (il faut choisir un intervalle sur lequel $t \mapsto sin^2(t)$ est bijective, c'est à dire ici strictement monotone, pour que le théorème du changement de variable s'applique).
   De plus, $du = 2cos(t)sin(t)dt = 2\sqrt{1-u}\sqrt{u}dt$.
   Donc : $\frac{du}{\sqrt{1-u}\sqrt{u}} = 2dt$.
   D'où : $L = \int_0^{\pi/2} 2dt = \pi$.

11.7 Équations différentielles d'ordre 1

11.7.1 Partie cours

Solution exercice 7.1

1. D'après le cours de terminales S, c'est la fonction $exp : x \mapsto e^x$.
2. $y : x \mapsto 2e^x$. En effet, $y' : x \mapsto 2e^x$. Donc $y' = y$.
3. f est dérivable comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 2e^{2x}$. Donc : $f'(x) = 2f(x)$. De plus, $f(0) = e^{2\times 0} = e^0 = 1$.
4. $g : x \mapsto 3e^{2x}$ convient.
5. $h : x \mapsto e^{2x} - 1,5$ convient puisque h est clairement dérivable sur $\mathbf{R}$ et que pour tout réel x, $h'(x) = 2e^{2x}$ tandis que $2h(x) + 3 = 2(e^{2x} - 1,5) + 3 = 2e^{2x} - 3 + 3 = 2e^{2x}$.

Solution exercice 7.2

1. *Note : à présent et jusqu'à la fin des exercices de ce chapitre, on ne précisera plus que les fonctions sont dérivables, étant donné qu'elles seront toutes des fonctions dérivables comme composées de fonctions dérivables et/ou par opérations sur les fonctions dérivables.*
   Pour tout réel x, $f'(x) - af(x) = cae^{ax} - ace^{ax} = 0$ donc f est bien solution.
2. (a) Remarquons qu'avec la question 1, on sait que l'ensemble H est effectivement non vide.
   Pour tout réel x, $\phi'(x) = f'(x)e^{-ax} - f(x)ae^{-ax} = e^{-ax}(f'(x) - af(x))$. Or, f est solution de (H) donc $f'(x) - af(x) = 0$.
   Donc : $\phi'(x) = 0$ et ainsi ϕ est constante sur $\mathbf{R}$.

(b) De plus, $\phi(0) = f(0)$.
Donc, pour tout réel x, $\phi(x) = \phi(0) \Leftrightarrow f(x)e^{-ax} = f(0) \Leftrightarrow f(x) = f(0)e^{-ax}$.

Solution exercice 7.3

Il y a deux points à démontrer ici : l'existence et l'unicité. Pour l'existence, il suffit d'en trouver une. Pour l'unicité, on suppose qu'il y a deux et paf ce sont les mêmes.
Essayez par vous-même à partir de ces indications.
⋆ **Existence**
Remarquons que la fonction $f\ x \mapsto \dfrac{y_0}{e^{ax_0}}e^{ax}$ est une solution de (H) vérifiant $f(x_0) = y_0$. Donc l'existence est assurée.
⋆ **Unicité**
Soit f et g deux fonctions solutions de H (il existe donc c et d deux réels tels que $f : x \mapsto ce^{ax}$ et $g : x \mapsto de^{ax}$) telles que $f(x_0) = y_0 = g(x_0)$. On en déduit aisément que $c = d$ et donc que $f = g$, d'où l'unicité.

Solution exercice 7.4

1. (a) f est solution de $(H_1) \Leftrightarrow \exists c \in \mathbf{R} : f : x \mapsto ce^{3x}$.
   (b) De plus, si $f(0) = 5 \Leftrightarrow 5 = c$ ie $f : x \mapsto 5e^{3x}$.
2. Cela revient à résoudre (H_2) avec comme condition initiale $g'(0) = 42$.
   (H_2) est équivalente à $y' = 3,5y$.
   Donc il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $g : x \mapsto ce^{3,5x}$.
   Donc : $g'(0) = 42 \Leftrightarrow c = \dfrac{42}{3,5} = 12$.
   Donc : $g : x \mapsto 12e^{3,5x}$.

Solution exercice 7.5

1. Immédiat, en calculant d'une part f_0' et d'autre part $af_0 + b$.
2. (a) Cela revient à montrer que $f' = af$.
   On sait que $f' = \phi' - f_0'$
   Or f_0 est constante (donc $f_0' = 0$)[4] et ϕ est solution de (E) donc $\phi' = a\phi + b$.
   Donc : $f' = a\phi + ba(f + f_0) + b = af + af_0 + b = af + a \times \left(\dfrac{-b}{a}\right) + b = af$.
   Donc f est solution de (H).
   (b) Comme f est solution de H, il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $f : x \mapsto ce^{ax}$.
   Comme $\phi = f + f_0$, on en déduit que $\phi : x \mapsto ce^{ax} + f_0(x)$.

Solution exercice 7.6

Est-ce vraiment la peine de mettre un corrigé ?

Solution exercice 7.7

Voir la correction de l'exercice 6.3, ce sont exactement les mêmes idées.

Solution exercice 7.8

⋆ Commençons par déterminer une solution particulière f_0 telle que f_0 soit une fonction constante.
Il faut que l'on ait pour tout réel x : $f_0'(x) = 3f_0(x) - 6 \Leftrightarrow 0 = 3f_0(x) - 6 \Leftrightarrow f_0(x) = \dfrac{6}{3} = 2$.
On vérifie aisément $f_0 : x \mapsto 2$ est bien une solution particulière de (E_3).
⋆ Résolvons l'équation homogène $(H_3) : y' = 3y$ associée à (E_3).
Soit f une solution de (H_3). Il existe donc $c \in \mathbf{R}$ tel que $f : x \mapsto ce^{3x}$.
⋆ Donc : $\phi : x \mapsto 2 + ce^{2x}$.
Or : $\phi(2) = 1 \Leftrightarrow 1 = 2 + ce^4 \Leftrightarrow c = -e^{-4}$.
D'où : $\phi : x \mapsto 2 - e^{-4}e^{2x}$.
Attention au piège dans cet exercice, qui consisterait à chercher trop tôt c !
En effet, on ne cherche c qu'en toute dernière étape, lorsque la forme de la fonction cherchée (ici, ϕ) est connue.

11.7.2 Partie exercices

Solution exercice 7.9

1. Ce fait bien en calculant.
2. En résumé, il faut donc résoudre l'équation $u' + 10u = 100$, soit $u' = -10u + 100$, avec comme condition particulière.
   Le détail des étapes est laissé à la lectrice.
   En résumé :
   ⋆ $u_0 = 10$ est une solution particulière.
   ⋆ $f : t \mapsto ce^{-10t}$ est la forme générale des solutions de l'équation $(H) : u' = -10u$, qui est l'équation homogène associée.
   ⋆ Donc : $u : t \mapsto 10 + ce^{-10t}$. LA condition initiale $u(0) = 0$ nous assure que $c = -10$ et donc que $u : t \mapsto 10 - 10e^{-10t}$.

4. Ceci est un abus de notation, signifiant que f_0' est la fonction constante nulle.

3. ⋆ $u'(t) = 100e^{-10t} > 0$ donc u croît strictement.
   ⋆ Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, on en déduit sans grande difficulté que $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = 10$.
   La tension aux bornes du condensateur ne fera qu'augmenter jusqu'à atteindre 10 volts.
4. $u(t) = 0,95E \Leftrightarrow 10 - 10e^{-10t} = 9,5 \Leftrightarrow \ldots t = \dfrac{\ln(0,05)}{-10} \approx 0,3$ secondes. Ça va très vite !... Bon, en même temps, on parle d'électricité, là.
5. Pour la résoudre, repartir de l'équation de base $\tilde{R}Cu' + u = E$ et travailler tout le long avec des lettres.
   On trouve $u_0 = E$ comme solution de l'équation particulière, $f : t \mapsto Ke^{-t/(RC)}$ comme solution de l'équation homogène (avec $K \in \mathbf{R}$) et $u : t \mapsto E - Ee^{-t/(RC)}$ comme solution générale.
   La réponse, pour avoir un temps de charge de $0,6s$ (c'est-à-dire $u(0,6) = 9,5$, que je vous laisse résoudre), est $\tilde{R} = \dfrac{-0,6}{C\ln(0,05)} \approx 2.10^5\Omega$, soit une résistance deux fois plus importante que la résistance initiale (l'écart entre 2×10^5 et $\tilde{R}$ s'expliquant par l'approximation effectuée à la question précédente, fort heureusement gommée par l'emploi judicieux des chiffres significatifs). C'est amusant, pour doubler le temps de charge, il faut doubler la résistance :)

Solution exercice 7.10

1. $N : t \mapsto N_0 e^{-1,2097\times10^{-4}t}$.
2. $N(10000) = N(10^4) \approx 0,298N_0$.
3. $0,5N_0 = N_0 e^{-1,2097\times10^{-4}T_{1/2}} \Leftrightarrow \ldots T_{1/2} = \dfrac{\ln(0,5)}{-1,2097\times10^{-4}} \approx 5730$.
4. Attention, si 95% est perdu, cela signifie qu'il en reste 5% $= 0,05$!. Soit $0,05N_0 = N_0 e^{-1,2097\times10^{-4}T} \Leftrightarrow \ldots T = \dfrac{\ln(0,05)}{-1,2097\times10^{-4}} \approx 24800$.

Solution exercice 7.11

1. Une solution particulière est $y_0 = \dfrac{0,8}{0,04} = 20$ et la forme des solutions de l'équation homogène associée à (E) est $f : t \mapsto \lambda e^{-0,04t}$, où $\lambda \in \mathbf{R}$.
   g est donc de la forme : $g : t \mapsto \lambda e^{-0,04t} + 20$. Or : $g(0) = 100 \Leftarrow \lambda = 80$ donc $g :\mapsto 80e^{-0,04t} + 20$.
   ⋆ Ainsi, $g(t) \leqslant 37 \Leftrightarrow \ldots t > \dfrac{\ln(17/80)}{-0,04} \approx 39$.
   Le plat ne pourra donc être touché qu'au bout de 39 minutes.
2. On peut de manière tout à fait pertinente faire l'hypothèse que la température de la pièce est la température du plat au bout d'un temps très long. La limite de g étant 20 (à montrer), la température dans la cuisine est de 20 C.

Solution exercice 7.12

1. Et si vous n'y arrivez pas, ouvrez un livre de physique. Nous sommes ici pour faire des maths, diantre ! :)
2. Vous devez trouver $i : t \mapsto \dfrac{E}{R} - \dfrac{E}{R}e^{-Rt/L}$.

Solution exercice 7.13

1. D'une part, $f_0'(x) = \ldots = e^{2x}(2ax^2 + x(2b + 2a) + 2c + b)$.
   D'autre part, $3f_0(x) + (3x^2 + 1)e^{2x} = e^{2x}(x^2(3a + 3) + 3bx + 3c + 1)$.
   Pour avoir l'égalité, il faut donc que l'on ait :
   $$\begin{array}{rcl} 2a &=& 3a+3 \\ 2b+2a &=& 3b \\ 2c+b &=& 3c+1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} a &=& -3 \\ b &=& 2a = -6 \\ c &=& b-1 = -7 \end{array}$$
   Ainsi, si f_0 est solution, alors $a = -3$, $b = -6$ et $c = -7$.
   Réciproquement, si $f_0 : x \mapsto e^{2x}(-3x^2 - 6x - 7)$, on vérifie facilement que f_0 est bien solution de (E).
2. Soit ϕ une solution de (E).
   Soit $f = \phi - f_0$.
   On montre que f est solution de l'équation homogène associée $y' = 3$, i.e. il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $f : x \mapsto ce^{3x}$.
   D'où $\phi = f + f_0$ et on conclut. Bim !

Solution exercice 7.14

1. Vrai car u ne s'annule jamais.
2. u est solution de $(E) \Leftrightarrow u'(x) = 2u(x) - 3u(x)^2$.
   Or, pour tout réel x, $u(x) = \dfrac{1}{w(x)}$ donc $u'(x) = \dfrac{-w'(x)}{w^2(x)}$.
   Ainsi : u est solution de $(E) \Leftrightarrow \dfrac{-w'}{w^2} = 2\dfrac{1}{w} - 3\dfrac{1}{w^2} \Leftrightarrow -w' = 2w - 3 \Leftrightarrow w' = 3 - 2w \Leftrightarrow w$ est solution de (F).

3. w est donc la solution de (F) telle que $w(0) = \dfrac{1}{u(0)} = 4$. Après résolution, on trouve $w : x \mapsto 2,5e^{-2x} + 1,5$.

   Donc : $u : x \mapsto \dfrac{1}{2,5e^{-2x} + 1,5}$.

Solution exercice 7.15

1. Se montre bien par implication réciproque.
2. On trouve une solution particulière puis la forme de solution de l'équation homogène et on trouve la solution générale : $z : t \mapsto ke^{t/20} + 3$, $k \in \mathbf{R}$.
3. D'où le résultat en passant à l'exponentielle dans l'égalité $g = \ln(f)$.
4. (a) $f : t \mapsto e^{ke^{t/20}+3}$. Or $f(0) = 1 \Leftrightarrow \ldots k = -3$. Donc : $f : t \mapsto e^{-3e^{t/20}+3}$.
   (b) Une étude du signe de la dérivée permet de facilement montrer que la fonction est strictement décroissante et donc que l'effectif de la population ne cessera de baisser.
   (c) La limite, par composées successives, est $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$. La population animal est donc amené à s'éteindre. Snif.
   (d) $f(t) \leqslant 0,02 \Leftrightarrow ...t \geqslant 20 \ln\left(\dfrac{3 - \ln(0,02)}{3}\right) \approx 16,693$. Cela correspond au temps en années nécessaires pour qu'il y ait moins de 20 d'animaux.

Solution exercice 7.16

La section "équations différentielles d'ordre 2" est laissée à l'appréciation du lecteur (les questions sont très détaillées, laissez-vous guider). C'est un peu long à taper, des tonnes d'exemples détaillés existent sur internet et si déjà vous réussissez les équations différentielles d'ordre 1, c'est cool !

11.8 Espace vectoriel

11.8.1 Partie cours

Solution exercice 8.1

1. Il faut reprendre la même démarche que l'exemple précédent.
   - $0 \in \mathbf{R}$ est l'élément neutre pour l'addition, et pour tous réels x et x', $x - x = 0$, $x + x' \in \mathbf{R}$.
   - De plus, $1 = 1_{\mathbf{Q}}$ est l'élément neutre pour la multiplication.
     Pour tous rationnels q et q' et pour tous réels x et x', $q.(x+x') = q.x+q.x'$, $q.(x+x') = q.x+q.x'$, $(q.q').x = q.(q'.x)$.
   - Donc : $\mathbf{R}$ est un $\mathbf{Q}$ espace vectoriel.
   - A l'inverse, $\mathbf{Q}$ n'est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. En effet, prenons un élément de $\mathbf{R}$ qui ne soit pas dans $\mathbf{Q}$, par exemple[5] $\sqrt{2}$. Soit $\dfrac{1}{3}$ un élément de $\mathbf{Q}$.
     Alors : $\sqrt{2}.\dfrac{1}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.
     Supposons que $\dfrac{\sqrt{2}}{3} \in \mathbf{Q}$.
     Il existe alors p et q deux entiers premiers entre eux, $q \neq 0$, tels que $\dfrac{\sqrt{2}}{3} = \dfrac{p}{q} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \dfrac{3p}{q} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbf{Q}$, ce qui est faux.
     Donc $\dfrac{\sqrt{2}}{3} \notin \mathbf{Q}$.
     On a donc pu trouver (au moins) un élément de $\mathbf{R}$ qui, en multipliant un rationnel, donne un nombre qui n'est pas rationnel.
     $\mathbf{Q}$ n'est donc pas un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
2. - $\overrightarrow{0}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ est l'élément neutre pour l'addition de vecteurs (quel que soit le vecteur $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.; $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$)
   - Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ est un vecteur à 2 coordonnés donc un élément de $\mathbf{R}^2$.
   - Voici pour l'aspect "somme".
   - Soit k et k' deux réels.
     On peut multiplier un vecteur par un réel en multipliant ses coordonnées par le réel. Tous les opérations (distributivité, associativité) se vérifient ainsi aisément
     Par ailleurs, en multipliant un vecteur par $1 \in \mathbf{R}$, on garde le même vecteur.
     Voici pour l'aspect "multiplication".
   - Donc : $\mathbf{R}^2$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel

5. Remarquons que nous avons démontré dans le chapitre 1 que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel... Mais alors, tout serait lié ? ? ?

3. Exactement la même démarche, en notant $0_{\mathbf{R}^n} = (0; \ldots; 0)$ l'élément neutre pour l'addition et $\overrightarrow{u} = (x_1; \ldots; x_n)$ les vecteurs. Remarquons que l'on note alors les coordonnées des vecteurs en ligne, avec le symbole "égal" entre le vecteur et ses coordonnées.
4.
   - La fonction constante nulle est l'élément neutre pour l'addition, la fonction constante égale à 1 celui pour la multiplication.
   - L'addition de fonctions f et g dérivables est commutative ($f + g = g + f$) et toute fonction dérivable a un opposé ($f + (-f) = 0$).
   - En multipliant une fonction dérivable par un réel, la fonction reste dérivable. On peut aisément de fait obtenir l'associativité et la distributivité.
   - L'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est donc bien un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

Solution exercice 8.2

- Comme toute fonction dérivable est continue, $D \subset C$.
- $f : x \mapsto x$ est un élément[6] de D donc $D \neq 0$.
- Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, soit[7] $(f, g) \in D^2$.
  Alors $\lambda f + \mu g$ est une fonction dérivable, d'après les opérations usuelles sur les fonctions dérivables.
- Donc : D est un $\mathbf{R}$-sev de C.

Solution exercice 8.3

1. Soit A un sev de E. Soit $a \in A$ (existe car A est non vide.
   La deuxième caractérisation nous assure que $-a \in A$.
   Donc : $0_E = a + (-a) \in A$ toujours d'après la deuxième caractérisation.
2.
   - $A \cap B \subset A \subset E$. Donc $A \cap B \subset E$.
   - $0_E \in A, 0_E \in B$ donc $0_E \in A \cap B$ donc $A \cap B \neq 0$.
   - Soit a et b deux éléments de $A \cap B$. Alors a et b sont aussi deux éléments de A.
     Donc, comme A est un $K - sev$ de E, pour tout λ et μ de $\mathbf{K}$, $\lambda a + \mu b \in A$.
     On montre de même que $\lambda a + \mu b \in B$.
     Donc : $\lambda a + \mu b \in A \cap B$.
   - Toutes les items de la 3ème caractérisation des sev est vérifiée.
     Donc : $A \cap B$ est un sev de E.
3. Exactement la même démonstration que la question d'avant avec des trois petits points ou par récurrence sur n (l'hérédité utilisant la question d'avant et le fait que $\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n+1} A_i = \left(\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} A_i\right) \cap A_n$).
4.
   - Notons que, comme intersection de sev, $vect(A)$ est un sev de E d'après la question précédente.
   - Soit B un sev de E contenant A.
     Soit $a \in vect(A)$. Alors $a \in B$ par définition.
     Ceci valant pour tout élément de A, $vect(A) \in B$.
     Donc $vect(A)$ est un sev de E plus petit que tout sev de E contenant A.
   - Il reste à vérifier qu'il contient effectivement A.
     Soit $a \in A$.
     Soit $(B_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la famille des sev contenant A.
     Comme, pour tout $i \in [1; n]$, $A \subset B_i$, alors $a \in B_i$.
     Donc : $a \in \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} B_i = vect(A)$.
     Ceci valant pour tout élément de A, on en conclut que $A \subset vect(A)$.
   - vect(A) est donc bien le plus petit sev de E contenant A.

Solution exercice 8.4

1. $\star$ Ici, $E = \mathbf{R}$, qui est un $\mathbf{R}-$ev.
   De plus, pour tous réels $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, pour tous $(b, c) \in \mathbf{R}^2$, $f_a(bx + cy) = a(bx + cy) = abx + cy = b(ax) + c(ay) = bf_a(x) + cf_a(y)$.
   f_a est donc une application linéaire allant de E vers E.
   C'est donc un endomorphisme.
   $\star$ Pour $a \neq 0$, f_a est strictement monotone et $Im(f_a) = \mathbf{R}$ donc f_a bijective.
   Comme elle est de plus linéaire, elle est alors un automorphisme.
   $\star$ En revanche, pour $a = 0$, f_0 est la fonction constante nulle. En particulier, $Im(f_0) \neq \mathbf{R}$. La fonction n'est donc pas bijective. Elle n'est donc qu'un endomorphisme.
2. $\star$ Ici, $E = \mathbf{R}^2$ et $F = \mathbf{R}$. Comme $E \neq F$, on sait d'ores et déjà que l'on ne pourra pas parler d'endomorphisme (pour ces derniers, l'espace de départ E et l'espace d'arrivé F doivent être les mêmes).
3. Soit $(X_1; X_2) \in E^2$. Il existe $(x_1; y_1) \in \mathbf{R}^2$ et $(x_2; y_2) \in \mathbf{R}^2$ tels que $X_1 = (x_1; y_1)$ et $X_2 = (x_2; y_2)$.
   Soit de plus $(a; b) \in \mathbf{K}^2$.

6. on aurait pu choisir n'importe quelle fonction dérivable de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, comme la fonction constate nulle ou la fonction exponentielle... Mais pas la fonction logarithme népérien, qui n'est défini que sur $]0; +\infty[$
7. Attention à l'ordre des étapes : il faut déjà s'assurer que D est non vide avant de considérer des éléments f et g de D.

Le but de la question (qui semble compliquée de prime abord mais qui en réalité est très simple) est de montrer que $g(aX_1 + BX_2) = ag(X_1) + bg(X_2)$. Essayez de faire par vous-même, pas à pas, à partir de cette indication.

⋆ Remarquons que le vecteur $aX_1 + bX_2$ a alors pour coordonnées[8] $(ax_1 + bx_2; ay_1 + by_2)$.
Alors : $g(aX_1+BX_2) = g((ax_1+bx_2; ay_1+by_2)) = ax_1+bx_2+ay_1+cy_2 = a(x_1+y_1)+b(x_2+y_2) = ag(X_1)+bg(X_2)$.
Ainsi, pour tout couple $(X_1; X_2) \in \mathbf{R}^2$, pour tous réels a et b, $g(aX_1 + BX_2) = ag(X_1) + bg(X_2)$.
Donc : g est bien une application linéaire.

Solution exercice 8.5

- Pour montrer que $Ker(f) \subset Ker(g \circ f)$, il faut montrer que tout élément du noyau de f est aussi un élément du noyau de $g \circ f$, c'est à dire montrer que si $x \in E$ vérifie $f(x) = 0_F$, alors $g(f(x)) = 0_G$.
  Essayez à partir de là, vous verrez, c'est très simple !

  Soit donc $x \in Ker(f)$.
  Par définition, $f(x) = 0_E$.
  Donc : $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(0_E) = 0_F$.
  Donc $x \in Kef(g \circ f)$.
  Ceci valant pour tout $x \in Kef(f)$, on en conclut que $Ker(f) \subset Ker(g \circ f)$.
- Montrons désormais que $Im(g \circ f) \subset Im(g)$. C'est la même démarche que le point précédent.
  ⋆ Soit $y \in Im(g \circ f)$.
  Il existe alors $x \in E$ tel que $y = g \circ f(x) = g(f(x))$.
  Or : $f(x) = z \in F$.
  Donc : il existe $z \in F$ tel que $y = g(z)$.
  Donc : $y \in Im(g)$.
  Ceci valant pour tout élément y de $Im(g \circ f)$, on en déduit que $Im(g \circ f) = Im(g)$.

Solution exercice 8.6

1. Voir l'avant-dernière remarque.
2. Le sens direct est "*si f est injective alors $ker(f) = \{0_E\}$*". On va procéder par double inclusion pour montrer le résultat.
   ⋆ On sait déjà que $f(0_E) = 0_F$.
   Donc $\{0_E\} \in ker(f)$.
   ⋆ Soit désormais $x \in ker(f)$.
   Donc : $f(x) = 0_F$.
   Ainsi, $f(x) = f(0_E)$.
   Comme f est injective, on en déduit que $x = 0_E$.
   Donc $ker(f) \subset \{0_E\}$.
   ⋆ Ainsi : $ker(f) = \{0_E\}$
3. Supposons désormais que $ker(f) = \{0_E\}$ et montrons que f est injective.
   Soit x et x' deux éléments de E tels que $f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$.
   L'astuce ici est de calculer $f(x) - f(x')$. Essayez, vous verrez !

   Ainsi : $0_F = f(x) - f(x') = f(x - x')$ par linéarité de f.
   Donc $x - x' \in ker(f)$.
   Or : $ker(f) = \{0_E\}$.
   Donc : $x - x' = 0_E$ i.e. $x = x'$.
   Ainsi, si $f(x) = f(x')$, alors $x = x'$.
   Ceci valant pour tout $(x; x') \in E^2$, on en conclut que f est injective.
   ⋆ L'équivalence est donc bien démontrée.

Solution exercice 8.7

1. Soit $(a; b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ et $(X_1 = (x_1; y_1); X_2 = (x_2; y_2)) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$.
   Montrons que $g(aX_1 + bX_2) = ag(X_1) + bg(X_2)$.
   Essayez par vous-même à partir de là, c'est exactement le même démarche que l'exercice 6.4.

   - On peut commencer par remarquer que d'après les opérations habituelles sur les vecteurs, le vecteur $aX_1 + bX_2$ a pour coordonnées $(ax_1 + bx_2; ay_1 + by_2)$
     Donc : $g(aX_1 + bX_2) = g((ax_1 + bx_2; ay_1 + by_2)) = 3i(ax_1 + bx_2) = a \times 3ix_1 + b \times 3ix_2 = ag(X_1) + bg(X_2)$.
     Ceci valant pour tous réels a et b et pour tous vecteurs X_1 et X_2, l'application g est linéaire.
     Comme elle va de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{C}$, on note cela $g \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{C})$.

8. Cela correspond aux opérations usuelles sur les vecteurs. Si vous prenez un vecteur $\vec{u}(3; 4)$, le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(3k; 4k)$. Même principe ici et même principe pour la somme.

2. • Pour montrer que g n'est pas injective, il suffit de trouve un élément de $\mathbf{R}^2$ qui ne soit pas le vecteur nul $(0;0)$ tel que son image par g vaille 0.
   • Pour montrer que g n'est pas surjective, il suffit de trouver un élément de $\mathbf{C}$ qui n'est pas d'antécédent par g.
   • Essayez à partir de là.
   • $g(0;42) = 3 \times i \times 0 = 0$.
   Donc : $(0;42) \in ker(g)$.
   Comme $(0;42) \neq 0_{\mathbf{R}^2} = (0;0)$, on en déduit que le noyau de g n'est pas égal à $0_{\mathbf{R}^2}$.
   g n'est donc pas injective d'après le théorème précédent.
   • Remarquons que l'ensemble des images $Im(g)$ est inclus dans l'ensemble des imaginaires purs (en réalité, ils sont égaux mais peu importe ici).
   Donc : $g(X) = 42$ n'admet aucune solution.
   Donc, d'après le théorème précédent, g n'est pas surjective.
3. Comme elle n'est pas injective, g n'est a fortiori pas bijective. [9]

Solution exercice 8.8

Rappelons que A est un sev de E si et seulement si $A \subset E$, $A \neq \emptyset$, $\forall (a,b) \in A^2, \forall (\lambda, \mu) \in K^2, \lambda.a + \mu.b \in A$.

1. • $f(A) \subset F$ de manière évidente.
   • Si A est un sev de E, alors $0_E \in A$.
   Donc $f(0_E) = 0_F$. Ainsi, pour $y = 0_F \in F$, il existe bien $x = 0_E \in E$ tel que $f(x) = y$.
   Donc $f(A) \neq \emptyset$.
   • Soit $(y_1, y_2) \in f(A)^2$ et $(\lambda, \mu) \in K^2$.
   Comme $y_1 \in f(A)$, il existe $x_1 \in A$: $f(x_1) = y_1$. On a de même $f(x_2) = y_2$.
   Ainsi : $\lambda.y_1 + \mu.y_2 = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) = f(\lambda.x_1 + \mu.x_2)$ par linéarité de f.
   Or, comme A est un sev de E, $\lambda.x_1 + \mu.x_2 \in A$.
   Donc : $\lambda.y_1 + \mu.y_2 = f(\lambda.x_1 + \mu.x_2) \in f(A)$.
   Ceci valant pour tout $(y_1, y_2) \in f(A)^2$ et $(\lambda, \mu) \in K^2$, on en conclut, d'après la caractérisation des sev, que A est bien un sev de F.
2. Même principe. Non vide car $0_E \in f^{-1}(B)$. Inclus dans E évidemment. Et $f(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) \in B$ car B est un sev donc $\lambda x_1 + \mu x_2 \in f^{-1}(B)$. Et on conclut.

Solution exercice 8.9

$ker(h) = f^{-1}(\{0_F\})$ et $\{0_F\}$ est un sev de F donc d'après le point 2 de la proposition précédente, $ker(h)$ est un sev de E.

Solution exercice 8.10

Même chose que l'exemple, avec $A = vect(1;0;0)$, $B = vect(0;1;0)$ et $C = vect(0;0;1)$.

11.8.2 Partie Exercices

Solution exercice 8.11

vect(1 ;0) est l'ensemble des vecteurs colinéaires au vecteur $\overrightarrow{u} = (1;0)$.
vect(2 ;0) est l'ensemble des vecteurs colinéaires au vecteur $\overrightarrow{w} = (2;0)$.
Or ces deux vecteurs sont colinéaires entre eux.
Donc : vect(1 ;0)=vect(2 ;0).

Solution exercice 8.12

Pour chacun des deux cas, il faut utiliser la caractérisation des sev dans la partie 3.
Détaillons là ici pour F, G est laissé à l'appréciation du lecteur.

- $f : x \mapsto x^2$ vérifie $f(0) = 0$ donc $f \in F$ et donc $F \neq \emptyset$.
- F est trivialement une partie de l'ensemble des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
- Soit f et g deux éléments de F, soit λ et μ deux réels.
  Soit $h : x \mapsto \lambda f(x) + \mu g(x)$. Montrons que h est un élément de F. Remarquons d'ores et déjà qu'il s'agit d'une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
  Or : $h(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0$.
  Donc : $h \in F$.
- D'après la caractérisation des sev, on en conclut que F est un sev de l'ensemble des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

Solution exercice 8.13

Là encore, on va utiliser la caractérisation des sev.

- $B \subset D$ de manière triviale.
- $f : t \mapsto e^{at}$ est une solution particulière de (H) donc B n'est pas vide.
- Soient $(f,g) \in B^2$, $(\lambda, \mu) \in R^2$.
  Soit $h : x \mapsto \lambda f(x) + \mu g(x)$.
  Remarquons que h est dérivable sur $\mathbf{R}$ par opérations sur les fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$.
  De plus, pour tout réel x,
  $h'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x) = \lambda a f(x) + \mu a g(x) = a(\lambda f(x) + \mu g(x)) = ah(x)$.

9. Cette phrase marche aussi en remplaçant "injective" par "surjective". Rappelons en effet qu'une application est bijective si elle est à la fois injective et surjective. Là, elle n'est ni l'un ni l'autre !

Donc : $h \in B$.

- Puis conclusion.

Solution exercice 8.14

1. (a) Certainement pas, quelle idée saugrenue !

   (b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = e^0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

   Attention, le piège est là ! ! ! ! ! ! ! ! ! !

   On ne peut pas conclure sur l'injectivité de f à ce stade puisque f n'est pas linéaire.

   Pour montrer qu'une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est injective, il faut montrer qu'elle est strictement monotone et donc étudier ses variations !

   Or, l'étude de ses variations (laissées à la lectrice) montre que f décroît sur $]-\infty; 0]$ et croît ensuite.

   f n'est donc pas monotone : elle n'est donc pas injective.

2. (a) Même principe que pour les autres.

   (b) $X = (x, y, z) \in ker(g) \Leftrightarrow (2x+y-z, x-y+3z) = (0, 0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+y-z & = & 0 \\ x-y+3z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & 2x+y \\ x-y+3(2x+y) & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$

   $\left\{ \begin{array}{rcl} z & = & 2x+y \\ 7x & = & -2y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & \dfrac{-4}{7}y + y = \dfrac{3}{7}y \\ x & = & \dfrac{-2}{7}y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -2t \\ y & = & 7t \\ z & = & 3t \end{array} \right.$ avec $y = 7t \in \mathbf{R}$.

   On reconnaît la représentation paramétrique d'une droite passant par l'origine $O(0; 0; 0)$ (ce qui fait le lien avec les fonctions linéaires... Incroyable !).

   Le noyau de g est donc la droite dont une représentation paramétrique est $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -2t \\ y & = & 7t \\ z & = & 3t \end{array} \right.$, $t \in \mathbf{R}$ et n'est donc pas réduit $(0, 0, 0)$.

   g n'est donc pas injective.

3. Il s'agit pour cela de montrer que l'application est linéaire, injective et surjective. Essayez à partir de là.
   - Pas de problème pour l'aspect linéaire, on a déjà fait des cas similaires. Il faut considérer $\mathbf{C}$ et $\mathbf{R}$ comme des $\mathbf{R}$-ev.
   - $z = x + iy \in ker(h) \Leftrightarrow h(z) = 0_{\mathbf{R}^2} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow z = 0$.
     Donc : $ker(h) = \{0_{\mathbf{R}^2}\}$.
     Donc : h est bien injective.
   - Soit $(x; y)$ un couple de réels et soit $z = x + iy$. Alors : $h(z) = (x, y)$.
     Tout élément de l'espace d'arrivée a donc un antécédent : h est donc surjective.
   - On en conclut que h est bien un isomorphisme.
     A noter que ce n'est pas un automorphisme car les espaces de départ et d'arrivée sont différents.

Solution exercice 8.15

1. Soit $y \in Im(f + g)$. Il existe donc $x \in E$ tel que $(f + g)(x) = y$ soit $f(x) + g(x) = y$.
   Or : $f(x) \in Im(f)$ et $g(x) \in Im(g)$ donc $y \in Im(f) + Im(g)$.
   Ceci valant pour tout $y \in Im(f + g)$, on en conclut que $Im(f + g) \subset Im(f) + Im(g)$.

2. Soit $x \in ker(f) \cap ker(g)$.
   Alors en particulier $x \in ker(f)$ donc $f(x) = 0$.
   De même, $g(x) = 0$.
   Donc : $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 0 + 0 = 0$.
   Donc $x \in ker(f + g)$.
   Ceci valant pour tout $x \in ker(f) \cap ker(g)$, on en conclut que $ker(f) \cap \ker(g) \subset ker(f + g)$.

3. Quelques pistes pour la résolution pour commencer. Quand il s'agit de montrer une équivalence qui n'est pas simple comme c'est le cas ici, une technique sécure est de d'abord montrer le sens direct puis le sens réciproque (ou l'inverse, mais en tout cas de faire un sens puis l'autre).

   De plus, on doit montrer des égalités d'ensemble. Pour cela, une autre technique sécure est de montrer que chaque ensemble est inclus dans l'autre (rappel de la méthode vue au chapitre 1 : soit $x \in A$. On raisonne et on montre que $x \in B$. Ceci valant pour tout $x \in A$, alors $A \subset B$. Puis soit $y \in B$.... donc $y \in A$ donc.... $B \subset A$. Donc, par double inclusion, $A = B$.)

   Bref, c'est une question qui prend du temps. Cependant, si on décompose proprement les étapes et le raisonnement, vous pourrez constater qu'il n'y a finalement pas de difficultés particulières. Essayez, vous verrez !
   - Montrons que $ker(f) = ker(h \circ f) \Rightarrow Imf \cap ker(h) = \{0_E\}$.
     $\star$ Remarquons que l'on immédiatement le fait que $\{0_E\} \subset Imf \cap ker(h)$. Montrons désormais l'inclusion dans l'autre sens.
     $\star$ Soit donc $y \in Imf \cap ker(h)$.
     Comme $y \in Im(f)$, il existe donc $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
     Comme $y \in ker(h)$, $h(y) = 0_G$.
     Donc : $O_G = h(f(x)) = h \circ f(x)$.

Donc : $x \in kerh \circ f$.
Or : $kerh \circ f = kerf$.
Donc : $x \in kerf$.
Donc : $f(x) = 0_F$ i.e. $y = 0_F$.
Ceci valant pour tout $y \in Imf \cap ker(h)$, on en déduit que $Imf \cap ker(h) \subset \{0_E\}$.
Par double inclusion, on a alors que $Imf \cap ker(h) = \{0_E\}$.
Le sens direct est démontré, yeah ! Passons au sens réciproque ![10]

- Réciproquement, supposons que $Imf \cap ker(h) = \{0_E\}$ et montrons que $ker(f) = ker(h \circ f)$.
  ⋆ Soit $x \in kerf$.
  Alors $f(x) = 0_F$.
  Donc : $h \circ f(x) = h(f(x)) = h(0_F) = 0_G$.
  Ceci valant pour tout $x \in kerf$, on en déduit que $kerf \subset ker(h \circ f)$.
  ⋆ Soit $x \in ker(h \circ f)$. Alors : $h \circ f(x) = 0_F$ i.e. $h(f(x)) = 0_F$.
  Donc : $f(x) \in ker(h)$.
  Or : $f(x) \in Imf$.
  Donc : $f(x) = 0_E$.
  Donc : $x \in ker(f)$.
  Ceci valant pour tout $x \in kerh \circ f$, on en déduit que $ker(h \circ f) \subset ker(f)$.
  Par double inclusion, on en conclut que $ker(h \circ f) = ker(f)$.
- Finalement, par implication réciproque, nous avons bien démontré l'équivalence souhaité, à savoir $ker(f) = ker(h \circ f) \Leftrightarrow Imf \cap ker(h) = \{0_E\}$

Remarque : il y a souvent un sens, dans les inclusions, qui est simple à montrer et qui par ailleurs est toujours vrai. L'autre en revanche est souvent plus technique et fait appel aux spécificités de la question. De toute façon, dans une démonstration, il faut à un moment ou à un autre utiliser toutes les hypothèses !

4. Conseils globaux : ce sont les mêmes méthodes que la question précédente. Je vais donc me permettre d'aller un chouia plus vite.
   - Supposons que $F = Imf + kerh$.
     ⋆ Soit $y \in Im(h \circ f)$.
     Il existe donc $x \in E$ tel que $y = h \circ f(x) = h(f(x)) \in Imh$.
     On en déduit que $Im(h \circ f) \subset Im(h)$.
     ⋆ Soit $y \in Im(h)$.
     Il existe $x \in F$ tel que $h(x) = y$.
     Or : $F = Imf + kerh$.
     Il existe donc $a \in Imf$ et $b \in kerh$ tel que $x = a + b$.
     Donc : $y = h(x) = h(a + b) = h(a) + h(b) = h(a)$ car $b \in kerh$ (et par linéarité de h.
     Or, $a \in Imf$ donc il existe $c \in E$ tel que $f(c) = a$.
     Donc : $y = h(f(c)) = h \circ f(c) \in Im(h \circ f)$.
     ⋆ Par suite, $Im(h) \circ Im(h \circ f)$ puis $Im(h) = Im(H \circ f)$.
   - Réciproquement, supposons que $Im(h) = Im(h \circ f)$ et montrons que $Imf + kerh = F$.
     ⋆ On montre rapidement que $Imf + kerh \subset F$.
     ⋆ Soit $y \in F$. L'idée est de trouver deux éléments $y_1 \in Im(f)$ et $y_2 \in ker(h)$ tels que $y = y_1 + y_2$.
     Bon, soyons francs, c'est clairement une question bien plus difficile que ce que vous avez fait jusqu'à maintenant. J'ai hésite à la laisser mais je trouve intéressant de vous présenter des points astucieux également.
     Disons qu'il faut au moins essayer en remplaçant ce qu'on a et en forçant le destin.
     ⋆ Comme $y \in F$, on peut calculer $h(y)$ et $h(y) \in Im(h)$.
     Or : $Im(h) = Im(h \circ f)$ donc il $h(y) \in Im(h \circ f)$.
     Il existe donc $x \in E$ tel que $h(y) = h \circ f(x)$.
     Et c'est là le coup de génie !
     ⋆ Écrivons $y = f(x) + y - f(x)$.
     Alors $f(x) \in Im(f)$. Il faudrait que $y - f(x)$ soit dans $ker(h)$ pour pouvoir conclure. Pourvu que ça marche !
     Et en effet, $h(y - f(x)) = h(y) - h(f(x)) = h(y) - h \circ f(x) = 0_G$.
     Donc : $y - f(x) \in kerh$.
     ⋆ Ainsi, on peut bien décomposer$y$ comme la somme d'un élément de Imf et d'un élément de $kerh$. Donc $y \in Imf + kerh$ et par suite $F \subset Imf + kerh$.
     ⋆ Par double inclusion, on en conclut que $F \subset Imf + kerh$
   - D'où l'équivalence démontrée par implication-réciproque.

Solution exercice 8.16

1. Soit $\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (u, w) \mapsto 2u - w$.
   On montre sans trop forcer que $\phi \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$.
   Alors $A = ker(\phi)$ est un sev de $\mathbf{R}^2$ d'après l'exercice 6.9.
2. (a) L'idée de l'analyse est de se dire : "Bon, les solutions, si elles existent, quelle sera nécessairement leur forme ? Essayons de voir cela.".

10. Et oui, nous n'avons fait que la moitié de la question. Du nerf, soldat !

Soit donc $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.
On suppose qu'il existe $(a, b) \in A \times B$ tel que $(x; y) = a + b$.
a est de la forme $(u, w) \in \mathbf{R}^2$ avec $2u - w = 0$ i.e. $w = 2u$ soit encore $a = (u, 2u)$.
De même, il existe $k \in \mathbf{R}$ tel que $b = (k; k)$ (tout vecteur de B est un vecteur colinéaire au vecteur $(1, 1)$.
Donc : $(x, y) = (u, 2u) + (k, k) = (u + k, 2u + k)$. On peut écrire cela sous la forme d'un système : (S) : $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & u+k \\ y & = & 2u+k \end{array}\right.$ d'inconnue u et k.
Alors : $(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & u+k \\ y-x & = & u \end{array}\right. (L_1) \leftarrow (L_2) - (L_1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & y-x+k \\ u & = & y-x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} k & = & 2x-y \\ u & = & y-x \end{array}\right.$.
Ainsi, si a et b existe, alors $a = (y - x, 2y - 2x)$ et $b = 2x - y, 2x - y)$.

(b) La synthèse, c'est l'inverse en fait. On va regarder si les solutions trouvées fonctionnent bien. N'ayez pas peur, ça fonctionne tout le temps. Pourquoi le faire alors, me direz-vous ? Derrière sa cache un raisonnement en implication-réciproque. Quand on résout une équation, il y a toujours le petit symbole $\Leftrightarrow$ qui se promène. Ce n'est pas anodin ! Or, dans l'analyse, il y a du "Donc". Donc on perd l'équivalence. Il faut donc vérifier que les solutions trouvées fonctionnent bien.
- Soit $(x; y) \in \mathbf{R}^2$.
  Posons $a = (y - x, 2y - 2x)$ et $b = (2x - y, 2x - y)$.
  Comme $2(y - x) - (2y - 2x) = 0$, $a \in A$.
  De plus, $b = (2x - y)(1, 1)$ donc $b \in B$.
  Enfin, $a + b = (y - x + 2x - y, 2y - x + 2x - y) = (x, y)$.
  Donc : $(x, y) = a = b \in A + B$. Ceci valant pour tout élément de $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^2 \subset A + B$.
- Comme $A + B \subset \mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^2 = A + B$.

3. Il reste à montrer que A et B sont en somme direct. Pour cela, il suffit de montrer que $A \cap B = \{0_{\mathbf{R}^2}\}$.
   Bon, alors déjà et sans effort, $\{0_{\mathbf{R}^2}\} \subset A \cap B$.
   Réciproquement, soit $X = (u, v) \in A \cap B$.
   Comme $X \in B$, $u = v$ donc $X = (u, u)$.
   Comme $X \in A$, $2u - u = 0$ i.e. $u = 0$.
   Donc $X = (0, 0) = 0_{\mathbf{R}^2}$.
   Ainsi, par double inclusion, $\{0_{\mathbf{R}^2}\} = A \cap B$.
   On en conclut que $A \oplus B = \mathbf{R}^2$

11.9 Polynômes

11.9.1 Partie cours

Solution exercice 9.1

1. Si l'on considère $A = X^2 + 1$ et $B = -X^2 + X$ alors $A + B = X + 1$.
   Ainsi, $deg(A + B) = 1 < 2 = deg(A) = max(deg(A), deg(B))$.
2. Si l'un des deux polynômes est égal à 0, la proposition est évidente. Supposons-le tous deux différents de 0. Supposons de plus que $deg(A) \geqslant deg(B)$ (leurs rôles étant symétriques, on peut bien faire une telle hypothèse).
   On note $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{deg(A)} a_k X^k$ et $B = \displaystyle\sum_{p=0}^{deg(B)} b_k X^p$.
   Pour tout $p \in [deg(B)\ ;\ deg(A)]$, p entier, posons $b_p = 0$.
   Alors : $A+B = \displaystyle\sum_{k=0}^{deg(A)} a_k X^k + \sum_{p=0}^{deg(B)} b_p X^p = \sum_{k=0}^{deg(A)} a_k X^k + \sum_{p=0}^{deg(A)} b_p X^p = \sum_{k=0}^{deg(A)} a_k X^k + \sum_{k=0}^{deg(A)} b_k X^k = \sum_{k=0}^{deg(A)} (a_k + b_k) X^k$.
   Si $a_{deg(A)} \neq -b_{deg(A)}$, alors $deg(A + B) = deg(A)$. Sinon, $deg(A + B) \leqslant deg(A) - 1 < deg(A)$.
   Donc : $deg(A + B) \leqslant deg(A) = max(deg(A), deg(B))$.
   De plus, si $deg(A) \neq deg(B)$, alors nécessairement $0 \neq a_{deg(A)} \neq -b_{deg(A)} = 0$. Donc : $deg(A+B) = max(deg(A), deg(B))$.
3. Cela revient à multiplier tous les coefficients de A par λ. Si on multiplie par 0, tous les coefficients de A deviennent nul donc $A = 0$ et donc $deg(A) = -\infty$. Sinon, les nouveaux coefficients de A sont $(\lambda a_k)_{k \in \mathbf{N}}$, avec pour tout entier k, $\lambda a_k \in \mathbf{K}$.
4. Il faut donc calculer AB tranquillement et vérifier que son coefficient associé X^4 est égal à $a_0 b_4 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4 b_0 = -7 \times 0 + 3 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times (-4)$.

Solution exercice 9.2 Soit $(A, B) \in \mathbf{K}[X]^2$, $(k, k') \in \mathbf{K}$.
On reprend la démarche de l'exemple 6.2, avec le polynôme nul comme élément neutre pour l'addition et le polynôme valant 1 comme élément neutre pour la multiplication.

Solution exercice 9.3
On reprend les notations de la définition précédente.

1. $deg(B) \geqslant 0$ car $B \neq 0$. De plus, comme $B \neq 0$, $A \neq 0$ et $L \neq 0$ donc $deg(A) \geqslant 0$ et $deg(L) \geqslant 0$.
   Alors : $deg(B) = deg(AL) = deg(A) + deg(L) \Leftrightarrow deg(A) = deg(B) - deg(L) \leqslant deg(B)$ car $deg(L) \geqslant 0$.
2. Notons L et L' les poly,ômes tels que $B = AL$ et $A = BL'$. Alors : $B = (BL')L = B(LL')$.
   Donc : $deg(B) = deg(B(LL')) = deg(B) + deg(LL') \Leftrightarrow deg(LL') = 0 \Leftrightarrow deg(L) + deg(L') = 0$.
   Si L ou L' est le polynôme nul alors $deg(LL') = -\infty$, ce qui est impossible. Les deux polynômes sont donc non nuls ici.
   Dans ce cas, $deg(L) \geqslant 0$ et $deg(L') \geqslant 0$). Comme $deg(L) + deg(L') = 0$, on en déduit que $deg(L) = deg(L') = 0$, i.e. les polynômes L et L' sont donc constants non nul.
   Posons $\lambda \in \mathbf{K}^\star$ tel que $L = \lambda$. Alors $B = \lambda A$.

Solution exercice 9.4

1. On élimine monôme par monôme, en pensant au coefficient. Ainsi, on commence par retirer $X^2 \times (X^3 - 2X + 3$ à notre polynôme de base, ce qui donne $4X^4 + 4X^3 - 2X^2 - X - 1$. Puis on retire à ce dernier $4X(X^3 - 2X + 3)$, ce qui donne $4X^3 + 6X^2 - 13X - 1$. etc.

$$\begin{array}{cccccc|l}
X^5 & +4X^4 & +2X^3 & +X^2 & -X & -1 & X^3 - 2X + 3 \\
-(X^5 & & -2X^3 & +3X^2) & & & X^2 + 4X + 4 \\
 & & & & & & \\
 & 4X^4 & +4X^3 & -2X^2 & -X & -1 & \\
 & -(4X^4 & & -8X^2 & +12X) & & \\
 & & & & & & \\
 & & 4X^3 & +6X^2 & -13X & -1 & \\
 & & (-4X^3 & & -8X & +12) & \\
 & & & & & & \\
 & & & 6X^2 & -5X & -13 &
\end{array}$$

   Au final, $X^5 + 4X^4 + 2X^3 + X^2 - X - 1 = (X^3 - 2X + 3)(X^2 + 4X + 4) + 6X^2 - 5X - 13$.
   On vérifie rapidement que les résultats sont cohérents, en regardant la constante ($-1 = 3 \times 4 - 13$ donc ça marche) et le monôme de plus haut degré ($X^5 = X^3 \times X^2$ donc ça marche). Si l'on dispose de plus de temps, on n'hésite pas à développer le résultat trouvé (à la main ou à la calculatrice si celle-ci dispose d'un logiciel de calculs formels) pour vérifier que l'on retrouve bien le résultat de base.
2. Évident si on raisonne par implication-réciproque (donc en montrant d'abord le sens direct, qui utilise l'unicité de la décomposition, puis le sens réciproque, qui utilise la définition de $B|A$).

Solution exercice 9.5 $B = X^2 + 2X + 1 = (X - 1)^2$. Sinon, on peut retrouver les racines avec la bonne vieille technique du discriminant !

Solution exercice 9.6

Notons Δ le discriminant de C.
Alors $\Delta = (-23)^2 - 4 \times 6 \times 21 = 25 > 0$.
Comme $\Delta > 0$, le polynôme admet deux racines réelles distinctes, $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{23 - 5}{12} = \dfrac{3}{2}$ et $x_2 = \dfrac{7}{3}$.
Les deux racines de C sont donc $\dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{7}{3}$. Ce sont des racines simples, et leur multiplicité est donc 1.
On peut donc écrire $C = 6\left(X - \dfrac{3}{2}\right)\left(X - \dfrac{7}{3}\right)$.

Solution exercice 9.7

- ($\Rightarrow$) Supposons que α soit une racine de A et montrons que $\tilde{A}(\alpha) = 0$.
  Comme α est une racine de A, il existe $L \in \mathbf{K}[X]$ tel que $A = (X - \alpha)L$.
  Donc : $\tilde{A} : x \mapsto (x - \alpha)\tilde{L}(x)$.
  Donc : $\tilde{A}(\alpha) = (\alpha - \alpha)\tilde{L}(\alpha) = 0$.
- ($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que $\tilde{A}(\alpha) = 0$ et montrons que α est une racine de A.
  Réalisons la division euclidienne de A par $(X - \alpha)$.
  Alors il existe deux polynômes Q et R, avec $deg(R) < deg(X - \alpha)$, tel que $A = (X - \alpha)Q + R$.
  Remarquons que puisque $deg(X - \alpha) = 1$, le degré de R est au plus 0 : il s'agit donc d'un polynôme constant.
  Or, $\tilde{A}(\alpha) = (\alpha - \alpha)\tilde{Q}(\alpha) + \tilde{R}(\alpha) = \tilde{R}(\alpha)$.
  Donc : $\tilde{R}(\alpha) = \tilde{A}(\alpha) = 0$.
  On en déduit que R est le polynôme nul. Donc : $A = (X - \alpha)Q$.
  Donc $(X - \alpha)$ divise bien A.

Solution exercice 9.8

1. ($\Rightarrow$) Par définition, nous savons en effet qu'il existe un polynôme B tel $A = (X - \alpha)^k B$.
   Montrons par l'absurde que $\tilde{B}(\alpha) \neq 0$. Supposons donc $\tilde{B}(\alpha) = 0$.
   D'après la proposition précédente, il existe $L \in \mathbf{K}[X]$ tel que $B = (X - \alpha)L$.
   Donc : $A = (X - \alpha)^k (X - \alpha)L = (X - \alpha)^{k+1} L$.
   Ainsi, $(X - \alpha)^{k+1}$ divise A, ce qui est en contradiction avec le fait que α soit une racine d'ordre exactement k.
   On en conclut que $B(\alpha) \neq 0$.

2. Évident, par définition.

Solution exercice 9.9

- Pour l'hérédité, on a quelque chose de la forme pour tout $i \in [1\ ;\ n+1]$, i entier, a_i est une racine d'ordre au moins α_i.

  D'après l'hypothèse de récurrence, $A = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i)\alpha_i \times B_1$, où $B_1 \in K[X]$

  Donc : $0 = \tilde{A}(a_{n+1}) = \prod_{i=1}^{n}(a_{n+1} - a_i)\alpha_i \times \tilde{B}_1 a_{n+1}$.

  Comme les (a_i) sont tous distincts, $\prod_{i=1}^{n}(a_{n+1} - a_i)\alpha_i \neq 0$.

  Donc : $B_1(\tilde{\alpha}) = 0$ i.e. α est une racine de B_1. On peut donc écrire $B_1 = (X - a_{n+1})B_2$.
- On sait donc que $A = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i)\alpha_i \times (X - a_{n+1})B_2$.

  Si $\alpha_{n+1} = 1$, B_2 ne sera pas divisible par $(X - a_{n+1})$ et la démonstration s'arrête là. Sinon, il sera divisible et on itère le processus α_{n+1} fois.

  On en déduit qu'il existe $C = B_{1+\alpha_{n+1}}$ tel que $A = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i)\alpha_i \times (X - a_{n+1})^{\alpha_{n+1}}C$, ce qui était bien le résultat souhaité.

Solution exercice 9.10

$deg(A) = deg(B) + \sum_{i=1}^{s}\alpha_i \Leftrightarrow deg(B) = 0$ car $n = deg(A) = \sum_{i=1}^{s}\alpha_i$. D'où la conclusion.

Solution exercice 9.11

1. - Notons $z = re^{i\theta}$, $r > 0$. Alors $z^4 = -1 \Leftrightarrow r^4 \times e^{i4\theta} = 1 \times e^{i\pi} \Leftrightarrow r^4 = 1$ et $4\theta = \pi[2\pi]$.
     Or : $r^4 = 1 \Leftrightarrow r^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (r^2)^2 - 1^2 = 0$
     A partir de là, essayez par vous-même !
     Donc $r^4 = 1 \Leftrightarrow (r^2-1)(r^2+1) = 0 \Leftrightarrow r^2-1 = 0$ car $r^2+1 > 0 \Leftrightarrow (r-1)(r+1) = 0 \Leftrightarrow r-1 = 0$ car $r+1 > 0 \Leftrightarrow r = 1$.
     De plus, $4\theta = \pi[2\pi] \Leftrightarrow 4\theta = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{2}\right]$ ..
     Donc, modulo 2π, les valeurs possibles pour θ sont $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{4}$.
     Remarquons que $\frac{7\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{4}$, *ce qui revient à* $\frac{\pi}{4}$ *modulo* 2π.
     Les quatre solutions de l'équation sont donc $z_1 = 1 \times e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = 1 \times e^{3i\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_3 = 1 \times e^{5i\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $z_4 = 1 \times e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   - — Ces quatre solutions sont donc donc quatre racines des $X^4 + 1$ dans $\mathbf{C}[X]$. Comme c'est un polynôme de degré 4, il admet au plus quatre racines.
     Son coefficient dominant étant 1, on en déduit que $X^4 + 1 = (z - z_1) \times (z - z_2) \times (z - z_3) \times (z - z_4) = \left(z - e^{i\pi/4}\right)\left(z - e^{3i\pi/4}\right)\left(z - e^{5i\pi/4}\right)\left(z - e^{7i\pi/4}\right)$.
   - Il faut utiliser les identités remarquables $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ et $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
     Ainsi,
     $$\begin{aligned} X^4 + 1 &= X^4 + 2X^2 - 2X^2 + 1 \\ &= X^4 + 2X^2 + 1 - 2X^2 \\ & (X^2)^2 + 2 \times X^2 \times 1 + 1^2 - 2X^2 \\ & (X^2 + 1)^2 - 2X^2 \\ & (X^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}X)^2 \\ & (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1) \end{aligned}$$
     On obtient ainsi une forme factorisée du polynôme.
   - On peut s'arrêter là mais il est pertinent de tester si l'on peut encore simplifier l'écriture. Notons Δ le discriminant des deux polynômes (oui, c'est le même, voyons !).
     $\Delta = 2 - 4 \times 1 = -2 < 0$ donc aucune racine réelle pour chacun d'entre eux donc on ne peut pas décomposer dans $\mathbf{R}[X]$ davantage.
   - On peut faire autrement grâce à la question 1. En effet, si $P = X^2 - \sqrt{2}X + 1$ était décomposable dans $\mathbf{R}[X]$, par unicité de la décomposition, alors l'un des facteurs de la décomposition dans $\mathbf{C}[X]$ diviserait P. Or chacun de ces facteurs est à coefficients dans $\mathbf{C}$ et non dans $\mathbf{R}$: ce ne sont donc pas des polynômes de $\mathbf{R}[X]$.
     On ne peut donc pas simplifier davantage l'écriture dans $\mathbf{R}[X]$.

11.9.2 Partie exercices

Solution exercice 9.12

1. On résout, comme dans l'exemple précédent, $x^6 + 27 = 0 \Leftrightarrow x^6 = -27$ à l'aide de la forme trigonométrique.

On trouve $\theta \in \{\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{5\pi}{6}\ ;\ \frac{7\pi}{6}\ ;\ \frac{9\pi}{6}\}$ et $r^2 = 3$ soit $r = \sqrt{3}$ car $r > 0$.

Donc : $X^6 + 27 = \prod_{k=0}^{4} \left(X - \sqrt{3}e^{ki\pi/6}\right)$.

2. Cela revient à résoudre $e^{in\theta} = ei0$, ce qui donne $\theta = \frac{2k\pi}{n}, k \in [0; n-1] \cap \mathbf{N}$.

   Donc : $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i2k\pi/n}\right)$.

Solution exercice 9.13

$\star$ Notons b et c les complexes distincts tels que $Q = (X-b)(X-c) = X^2 - (b+c)X + bc$ [Q est de degré 2 : on peut donc l'écrire sous forme factorisée]. En particulier, $b + c = a$ (E_1) et $bc = 1$ (E_2).

$\star$ P ayant les mêmes racines que Q, il existe deux complexes d et e (éventuellement égaux) tels que $P = Q(X-d)(X-e) = (X-b)(X-c)(X-d)(X-e) = \ldots = X^4 - (b+c+d+e)X^3 + (ed + (b+c)(d+e) + bc)X^2 - ((b+c)ed + bc(d+e))X + bced$. En utilisant les égalités (E_1) et (E_2), on peut écrire $P = X^4 - (a+d+e)X^3 + (ed + a(d+e) + 1)X^2 - (aed + d + e)X + ed$.

En identifiant les coefficients avec $P = X^4 + 0 \times X^3 + 0 \times X^2 - 1 \times X + a$, on obtient en particulier les égalités suivantes $\left\{\begin{array}{rcl} b+c & = & a(E_1) \\ b+c+d+e & = & 0(\text{avec les coefficients de } X^3) \\ aed+d+e & = & 1(\text{avec les coefficients de } X) \\ ed & = & a(\text{avec les constantes}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} b+c & = & a \\ a+d+e & = & 0 \\ a^2+d+e & = & 1 \\ ed & = & a \end{array}\right.$ Avec les lignes 1 et 2, on obtient l'équation de degré 2 en a suivante : $a^2 - a = 1 \Leftrightarrow a^2 - a - 1 = 0$.

On trouve un discriminant de 5 donc deux possibilités : $a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Solution exercice 9.14

Dans $\mathbb{C}[X]$, il existe trois complexes a, b et c tels que $a + b = 1$ et $P(X) = 2(X-a)(X-b)(X-c)$ (car P est un polynôme de degré 3 et de coefficient dominant 2). En développant les deux premiers facteurs entre eux, en remplaçant $a + b$ par 1 et en ordonnant P, on obtient $P = 2X^3 - X^2(2c+2) + X(2c+ab) + abc$. Par identification des coefficients, on obtient le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcl} 2c+2 & = & -1 \\ 1+ab & = & -7 \\ abc & = & d \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c & = & 0,5 \\ ab & = & -8 \\ d & = & abc = -4 \end{array}\right.$ et donc $d = -4$.

Solution exercice 9.15

Notons n le degré de P. Le polynôme Q est donc de degré au plus n. Or, pour tout entier $k \in [0; n]$, $\tilde{Q}(kT) = \tilde{P}(kT) - \tilde{P}(0) = \tilde{P}(0) - \tilde{P}(0) = 0$ (par périodicité de P). Donc Q admet au moins $n+1$ racines (en réalité une infinité !). Comme il est de degré au plus n, on en déduit que Q est le polynôme nul. Ainsi, $P(X) = P(0)$ et donc P est un polynôme constant.

Solution exercice 9.16

1. ça marche.
2. une récurrence sur $n = deg(P)$ et tout se passe bien. On rappelle que $P^{(k)}$ est la dérivée $k^{\text{ième}}$ de P. Ainsi, $P^{(2)}$ est la dérivée de la dérivée, soit au final la dérivée de $P^{(1)} = P'$; $P^{(3)}$ est la dérivée de la dérivée de la dérivée, soit au final la dérivée de $P^{(2)}$.

   Par convention, $P^{(0)} = P$ et $P^{(1)} = P'$.

   Voici les grandes étapes de la récurrence.

   - **Introduction de la propriété**
   - **Initialisation**

     Pour $n = 0$, P est un polynôme constant donc $P(X) = \lambda$, où $\lambda \in K$.

     Or : $\sum_{k=0}^{0} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k = \frac{P^{(0)}(a)}{0!}(X-a)^0 = \frac{\lambda}{1} \times 1 = \lambda = P(X)$

     Donc la propriété est vraie au rang 0.
   - **Hérédité**

     On suppose la propriété vraie à un certain rang n.

     Soit $P(X)$ un polynôme de degré $n+1$.

     Alors il existe $(a_0, ..., a_{n+1}) \in K^{n+2}$ tel que $P(X) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k$.

     Par définition, $P'(X) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} a_{k+1}(k+1)X^k$ est un polynôme de degré n, de c. On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence.

     Ainsi, $P'(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(P')^k(a)}{k!}(X-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(P)^{k+1}(a)}{k!}(X-a)^k = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(P)^k(a)}{(k-1)!}(X-a)^{k-1}$.

     En primitivant (rappelons que $(P)^k(a)$ est une constante pour tout k !), on trouve $P(X) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(P)^k(a)}{(k)!}(X-a)^k + m$, où m est constante de K.

Or : Si on calcule avec cette formule $P(a)$, les $(X-a)$ faisant 0, on obtient $P(a)=m$.
Donc : $P(X)=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(P)^k(a)}{(k)!}(X-a)^k+P(A)=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(P)^k(a)}{(k)!}(X-a)^k+\frac{P^0(a)}{0!}\times(X-a)^0=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(P)^k(a)}{(k)!}(X-a)^k$.

- **Conclusion**

3. Là-aussi, la récurrence fonctionne bien. On ne présente ici que l'initialisation (pour $n=1$).
   Comme a est une racine d'ordre 1, il existe un polynôme B tel que $P(X)=(X-a)B(X)$ et $B(a)\neq 0$.
   Alors $P(a)=0$ et $P'(X)=B(X)+(X-a)B'(X)$.
   Donc : $P'(a)=B(a)+0=B(a)\neq 0$.
   L'initialisation est donc bien vérifiée. L'hérédité fonctionne de la même manière.

Solution exercice 9.17
Pas du tout. Contre-exemple avec $P(X)=(X-1)(X-2)$ et $Q(X)=(X-1)(X-2)(X-3)$.

11.10 Espace vectoriel de dimension finie

11.10.1 Partie cours

Solution exercice 10.1 Au point situé à l'origine.

Solution exercice 10.2

1. Il suffit de choisir deux vecteurs non colinéaires, par exemple $\vec{u}(2;0)$ et $vecv(3;0)$.
   Alors : $3\vec{u}-2\vec{v}=0_{\mathbf{R}^2}$. Il existe donc bien des réels $\lambda=3$ et $\mu=-2$ non tous les deux nuls tels que $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}=0_{\mathbf{R}^2}$.
2. Soit[11] $e_1=(1;0;0)$, $e_2(0;1;0)$ et $e_3(2;0;1)$.
   - On montre assez aisément que (e_1,e_2,e_3) est une famille libre.
   - Soit $u(x;y;z)\in\mathbf{R}^3$. Il faut montrer que u se décompose en fonction de e_1, e_2, e_3.
     Or[12] : $(x-2z)e_1+ye_2+ze_3=u$.
     Attention à bien comprendre le rôle des différents lettres ici : e_1 est un vecteur ; x est un réel.
     (e_1,e_2,e_3) est donc une base de $\mathbf{R}^3$.
3. - L'aspect générateur est évident : on peut exprimer n'importe quel polynôme de degré au plus n comme combinaison linéaire de $(1,X,...,X^n)$.
     Par exemple, pour $n=4$: $X^3-7=0\times X^4+1\times X^3+0\times X^2+0\times X+(-7)\times 1$.
   - Soit $(\lambda_0,...,\lambda_n)\in\mathbf{K}^{n+1}$ tels que $\sum_{k=0}^{n}\lambda_kX^K=0$.
     En remplaçant X par 0, on obtient que $\lambda_0=0$.
     Donc : $0\sum_{k=1}^{n}\lambda_kX^k=X\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_kX^{k-1}\right)$.
     Comme X n'est pas identiquement nul, on en déduit que $0=\sum_{k=1}^{n}\lambda_kX^{k-1}$.
     De même, on en déduit que $\lambda_1=0$. Par suite, on en déduit que pour tout entier $k\in[0;n]$, $\lambda_k=0$.
     Donc : la famille $(1,X,...,X^n)$ est libre.
   - C'est donc bien une base.

Solution exercice 10.3

1. (a) Comme $(e_1,...,e_n)$ est une base, c'est en particulier une famille génératrice, d'où l'existence d'une telle famille.
   (b) Supposons qu'il existe $(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ une famille d'éléments de $\mathbf{K}$ tels que $x=\sum_{k=1}^{n}\mu_ke_k$. Or : $x=\sum_{k=1}^{n}\lambda_ke_k$.
   Donc : $\sum_{k=1}^{n}\mu_ke_k=\sum_{k=1}^{n}\lambda_ke_k\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}(\mu_k-\lambda_k)e_k=0_{K^n}$.
   Comme $(e_1,\ldots,e_n)$ est une famille libre alors pour tout entier k compris entre 1 et n, $\mu_k-\lambda_k=0$ i.e. $\mu_k=\lambda_k$.
   D'où l'unicité.
2. Réciproquement, supposons que pour tout $x\in E$, il existe une unique famille $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ tel que $x=\sum_{k=1}^{n}\lambda_ke_k$.
   (a) Alors la famille $(e_1,...,e_n)$ est une famille génératrice par définition d'une famille génératrice.

11. Il faut choisir trois vecteurs non colinéaires.
12. Rien de magique là-dedans. Seul e_2 a un coefficient non nul dans la deuxième coordonnées. Pour trouver u, il faut donc multiplier e_2 par y, la deuxième coordonnée de u. Même principe pour la multiplication ze_3. Le $x-2z$ découle alors : c'est le seul coefficient permettant d'obtenir x in fine pour la première coordonnée de u.

(b) Par ailleurs, soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ telle que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0_{K^n}$.

Or : $0_{K^n} = \sum_{k=1}^{n} 0 \times e_k$.

Par unicité de la décomposition, pour tout entier k compris entre $[1; n]$, $\lambda_k = 0$.

$(e_1, \ldots, e_n)$ est donc une famille libre.

La famille est donc libre et génératrice : c'est donc une base.

Solution exercice 10.4

$X^3 - 2X^2 + 7 - 4X = 7 \times 1 + (-4) \times X + (-2) \times X^2 + 1 \times X^3 + 0 \times X^4 + 0 \times X^5$.
Les coordonnées sont donc $(7; -4; -2; 1; 0; 0) \in \mathbf{R}^6$.

Solution exercice 10.5

1. 1 ($\{1\}$ est une base)[13] comme $\mathbf{C}$ et 2 ($\{(1; 0); (0; 1)\}$ est une base)[14] comme $\mathbf{R}$-ev.
2. $n + 1$, puisqu'il y a $n + 1$ éléments dans la base canonique (on va de X^0 à X^n).

Solution exercice 10.6

Notons $F = \{f_1, \ldots, f_k\}$.

1.
   - Supposons que $F \cup \{u\}$ soit un famille libre. En particulier cela signifie que $u \neq 0_E$.
     Montrons par l'absurde que $u \notin vect(F)$. Supposons donc que $u \in vect(F)$.
     Alors il existe $(\lambda_1, \ldots, lambda_k) \in \mathbf{K}^n$ tels que $u = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i \Leftrightarrow u - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i = 0$, ce qui est en contradiction avec le fait $F \cup \{u\}$ soit libre.
     Donc : $u \notin vect(F)$.
   - Réciproquement, supposons que $u \notin vect(F)$.
     La réciproque peut aussi se faire à l'aide d'un raisonnement par l'absurde et est laissée à l'appréciation de la lectrice.
2.
   - Le sens réciproque est immédiat par définition de la base.
   - Supposons donc que $card(F) = n$.
     Soit u un élément de E. Le but est de montrer que F est une famille génératrice de E donc que $u \in vect(F)$. Là encore, nous allons procéder par l'absurde... Essayez donc !
     Supposons donc que $u \notin vect(F)$.
     Alors, d'après la question 1 (le lemme), $F \cup \{u\}$ est encore une famille libre.
     Son cardinal est alors $card(F) + 1 = n + 1 > n$.
     Or, d'après le théorème précédent, une famille libre de E a un cardinal d'au plus n.
     On aboutit donc à une contradiction.
     Ainsi, $u \in vect(F)$: F est donc bien une famille génératrice de E. Comme elle était aussi une famille libre, elle est donc une base.

Solution exercice 10.7

1. Soit A est un ev et $A \cap B$ est un sev de A (voir chapitre sous les ev). Donc, d'après la théorème sur l'existence du supplémentaire, C, sev de A supplémentaire de $A \cap B$ comme sev de A, existe.
   Alors $A = A \cap B \bigoplus C$. D'où la conclusion.
2. Attention, ce n'est pas une équation ! C'est une égalité d'ensembles.
3. Démontrons que $B + C \subset A + B$ et que $A + B \subset B + C$.
   - Comme C sev de A, on a l'inclusion $B + C \subset A + B$.
   - Soit $x \in A + B$. On va utiliser le fait que $A = A \cap B \bigoplus C$. Essayer !
     Il existe donc $(a, b) \in A \times B$ tel que $x = a + b$.
     Or $a \in A \cap B \bigoplus C$ donc il existe $(c, d) \in A \cap B \times C$ tels que $a = c + d$.
     Donc : $x = c + d + b = (b + c) + d$.
     Or : $d \in C$ et $b + c \in B$ car $c \in A \cap B \subset B$ et $b \in B$.
     Donc $x \in B + C$.
     Ceci valant pour tout élément de $A + B$, $A + B \subset B + C$.
   - On en conclut que $B + C = A + B$.
   - De plus, soit $x \in B \cap C$.
     Or C est le supplémentaire de $A \cap B$ et est inclus dans A. L'intersection de B et de C est donc réduite à l'élément nul.
     Donc $B \bigoplus C = A + B$
4. Ainsi, $dim(A + B) = dim(B \bigoplus C) = dim(B) + dim(C)$.
   D'après la question 1, $dim(C) = dim(A) - dim(A \cap B)$.
   Donc : $dim(A + B) = dim(A) + dim(B) - dim(A \cap B)$.

13. En effet, pour z un complexe, ses coordonnées dans cette base seraient... (z).
14. En effet, pour $z = a + ib$ un complexe, ses coordonnées dans cette base seraient $(a; b)$.

Solution exercice 10.8

Bonne chance !

Solution exercice 10.9

- Si F est de dimension finie, alors comme $Im(f)$ est un sev de F, $Im(f)$ est également de dimension finie et $rg(f) = dim(Im(f)) \leqslant dim(F)$ (théorème 8.13).
- Sinon, supposons F de dimension infinie et E de dimension finie. Notons $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
  Soit $y \in Im(f)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
  Or, comme B est une base de E, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$.
  Donc $y = f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(e_k)$ (car f est une application linéaire).
  Tout élément de $Im(f)$ est donc exprimable en fonction d'une combinaison linéaire d'éléments de la famille $G = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$.
  G est donc une famille génératrice de $Im(f)$.
  D'après le théorème 8.7, on peut extraire une base de cette famille. $Im(f)$ est donc de dimension au plus n.
  f est donc bien de rang fini.
  Comme F est de dimension infinie, on a évidemment $rg(f) \leqslant dim(F)$.

Solution exercice 10.10

1. - $kef(f)$ est un sev de E (voir chapitre 6), qui est de dimension finie. Donc, d'après le théorème 8.15, il existe G supplémentaire de $ker(f)$ dans E. Remarquons qu'en particulier, G est de dimension finie.
   - Montrons que ϕ est un isomorphisme, c'est à dire est une application linéaire injective et surjective.
     $\star$ ϕ est une application linéaire comme restriction[15] de l'application linéaire f.
     $\star$ Rappelons que ϕ est injective $\Leftrightarrow ker(\phi) = \{0\}$ (voir chapitre 6).
     Soit $x \in ker(\phi)$. Alors $\phi(x) = 0$ i.e. $f(x) = 0$.
     Donc : $x \in ker(f)$. Or $x \in ker(\phi) \subset G$. Donc $x \in ker(f) \cap G = \{0\}$ ($ker(f)$ et G étant supplémentaires).
     Ceci valant pour tout $x \in ker(\phi)$, on en déduit que $ker(\phi) \subset \{0\}$ et donc que $ker(\phi) = \{0\}$.
     ϕ est donc bel et bien injective.
     $\star$ Rappelons que ϕ est surjective $\Leftrightarrow Im(\phi) = Im(f)$ (voir chapitre 6).
     On sait que $Im(\phi) \subset Im(f)$ par définition de ϕ.
     Soit $y \in Im(f)$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
     Or : $E = ker(f) + G$. Il existe donc $(u, v) \in (ker(f)) \times G$ tel que $x = u + v$.
     Donc : $y = f(u + v) = f(u) + f(v)$ par linéarité de f.
     Or $u \in ker(f)$ donc $f(u) = 0$.
     Donc : $y = f(v) \in Im(\phi)$ car $v \in G$.
     Ceci valant pour tout $y \in Im(f)$, on en déduit que $Im(f) \subset Im(\phi)$.
     Par suite, $Im(f) = Im(\phi)$: ϕ est donc bien surjective.
     $\star$ On en conclut que ϕ est bien un isomorphisme.
2. On sait que G est de dimension finie d'après la question précédente.
   D'après le théorème 8.14, on en déduit que $dim(G) = dim(Im(f)) = rg(f)$.
   Or : $dim(E) = dim(ker(f)) + dim(G)$ car $E = kerf \bigoplus G$.
   D'où : $dim(E) = dim(ker(f)) + rg(f)$.

Solution exercice 10.11

- D est une application linéaire (par linéarité de la dérivation).
- Ici, $E = \mathbf{R}_n[X]$ a pour dimension finie $n + 1$.
  D'après la formule du rang, $dim(E) = rg(D) + dim(ker(D))$.
  Soit $P \in ker(D)$. Alors $P' = 0$. P est donc un polynôme constant.
  On en déduit que $ker(D) = \mathbf{R}_0[X]$ i.e. $dim(ker(D)) = 1$.
  D'où : $n + 1 = rg(D) + 1 \Leftrightarrow rg(D) = n$.
- Remarquons de plus que $Im(D)$ est trivialement un sev de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$.
- D'après le théorème 8.13, on en conclut que $Im_D = \mathbf{R}_{n-1}[X]$.

Solution exercice 10.12

- Supposons f injective. Alors $dim(ker(f)) = 0$ puisque $ker(f) = \{0\}$.
  Donc, d'après le théorème du rang, $0 + rg(f) = dim(E)$ i.e. $rg(f) = dim(F)$.
  Comme $Im(f)$ est un sev de F, on en déduit que $F = Im(f)$.
  Donc f est surjective (et donc f bijective).
- Supposons f surjective. De même, on arrive à $dim(ker(f)) = 0$ et donc f injective (et donc f bijective).

11.10.2 Partie exercices

Solution exercice 10.13

15. C'est à dire comme application définie sur une partie (ici G) de l'ensemble de définition (ici E) de f.

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2, x \mapsto (x, 0)$ est injective mais n'est pas surjective.

Solution exercice 10.14

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ tels que pour tout réel x, $\lambda f(x) + \mu g(x) = 0$.
Montrons par l'absurde que λ et μ sont tous les deux nuls.
Supposons donc qu'au moins l'un des deux soit différent de 0.
f et g n'étant pas identiquement nulles[16], le second est nécessairement non nul également[17]
On peut donc écrire que $e^x = -\dfrac{\lambda}{\mu}x$.
Or : $e^x > 0$ pour tout réel x, ce qui n'est pas le cas $\dfrac{\lambda}{\mu}x$. On aboutit donc à une contradiction.
Donc : λ et μ sont égaux à 0.
La famille (f, g) est donc bien une famille libre.

Solution exercice 10.15

1. (a)
   - $E \subset \mathbf{R}^3$.
   - Soit $(u, w) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$).
     Ils existent $((x_u, y_u, z_u), (x_w, y_w, z_w)) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ tels que $u = (x_u, y_u, z_u)$ et $x_u + y_u + z_u = 0$ (de même pour w).
     Montrons que $\lambda u + \mu w \in E$.
     Or : $\lambda u + \mu w = (\lambda x_u + \mu x_w, \lambda y_u + \mu y_w, \lambda z_u + \mu z_w)$.
     Donc : $x_{\lambda u+\mu w} + y_{\lambda u+\mu w} + z_{\lambda u+\mu w} = \lambda x_u + \mu x_w + \lambda y_u + \mu y_w + \lambda z_u + \mu z_w = \lambda(x_u + y_u + z_u) + \mu(x_w + y_w + z_w) = 0 + 0 = 0$.
     Donc : $\lambda u + \mu w \in E$.
     Donc, d'après le théorème de caractérisation des sev, E est bien un sev de $\mathbf{R}^3$.

   (b) ϕ est une application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$ (immédiat) et E est son noyau. C'est donc un sev de $\mathbf{R}^3$.
2. $((1, 0, -1), (1, -1, 0))$ est une famille libre de cardinal 2 de E.
3. - Si E était de dimension 3, E serait de la même dimension que $\mathbf{R}^3$. Comme c'en est un sev, on aurait alors $E = \mathbf{R}^3$.
     Or $(1, 1, 1) \in \mathbf{R}^3$ et $(1, 1, 1) \notin E$.
     Donc $E \neq \mathbf{R}^3$.
     Donc : $dim(E) < 3$.
   - Or, comme E possède une famille libre de cardinal 2, alors $dim(E) \geqslant 2$.
     La dimension étant un entier, on en déduit que $dim(E) = 2$.
   - On reconnaît dans E l'équation cartésienne d'un plan de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$. Or les plans sont de dimension 2. On pouvait donc anticiper ce résultat.
4. D'après le théorème du rang, $dim(\mathbf{R}^3) = dim(ker(\phi)) + rg(\phi) \Leftrightarrow 3 = dim(E) + rg(\phi) \Leftrightarrow 3 = 2 + rg(\phi) \Leftrightarrow rg(\phi) = 1$.
   L'ensemble des points appartenant à l'image par l'application ϕ est un ensemble de dimension 1, i.e. est une droite.

Solution exercice 10.16

On sait que $F \cap G \neq \emptyset$ puisque $0_{\mathbf{R}^3} = (0, 0, 0) \in F \cap G$.
Or l'intersection de deux plans dans l'espace est soit vide soit au moins une droite.
$F \cap G$ ne peut donc être réduit à $0_{\mathbf{R}^3}$ et est au moins de dimension 1.

Solution exercice 10.17

Indication : il faut utiliser la formule de Grassman. Essayez donc !

Supposons que $F \cap G = 0_{\mathbf{R}^5}$.
Alors, d'après la formule de Grassman,
$dim(F + G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G) = 3 + 3 - 0 = 6 > dim(\mathbf{R}^5)$.
Or : $F + G$ est un sev de $\mathbf{R}^5$. On aboutit donc à une contradiction.
Donc : $F \cap G \neq 0_{\mathbf{R}^5}$.

Solution exercice 10.18

1. - D'après la formule de Grassman, $dim(Im(f) + Im(g)) \leqslant dim(Im(f) + dim(Im(g)) = rg(f) + rg(g)$.
   - Il reste à montrer que $rg(f + g) = dim(Im(f + g)) \leqslant dim(Im(f) + Im(g))$.
     Soit $y \in Im(f + g)$. Il existe $x \in E$ tel que $(f + g)(x) = y$ i.e. $f(x) + g(x) = y$.
     Donc $y \in Im(f) + Im(g)$.
     Ceci valant pour tout $y \in Im(f + g)$, on en déduit que $Im(f + g) \subset Im(f) + Im(g)$.
     Par suite, $rg(f + g) \leqslant dim(Im(f) + Im(g))$.
   - On en conclut que $rg(f + g) \leqslant rg(f) + rg(g)$.
2. - On suppose de plus que $f + g$ est bijective. Donc $rg(f + g) = dim(E)$.
   - On sait donc que, avec la question 1, que $dim(E) \leqslant rg(f)+rg(g)$. Il reste donc à montrer que $rg(f)+rg(g) \leqslant dim(E)$.
     Or, on sait que pour tout $x \in E$, $g(f(x)) = 0_E$.
     Donc : $Im_f \subset ker(g)$.

16. Dit autrement, ce ne sont pas les fonctions constantes égales à 0.
17. Supposons en effet que $\lambda \neq 0$. Alors $\lambda x + \mu e^x = 0$ pour tout réel x. Si $\mu = 0$, alors $\lambda x = 0$ pour tout réel x et donc $x = 0$ (puisque $\lambda \neq 0$), ce qui est absurde.

Donc : $rg(f) \leqslant dim(ker(g))$.
D'après le théorème du rang, $dim(ker(g)) = dim(E) - rg(g)$.
On a ainsi $rg(f) \leqslant dim(E) - rg(g) \Leftrightarrow rg(f) + rg(g) \leqslant dim(E)$.

- On en conclut que $rg(f) + rg(g) = dim(E)$.

Solution exercice 10.19

1. Remarquons que G est un plan (on en reconnaît l'équation cartésienne) donc est de dimension 2. Il suffit donc de trouver deux éléments de G qui soient libres, c'est à dire finalement deux vecteurs de G non colinéaires.
   $\mathcal{B} = (u = (1, 0, -1), w = (2, -1, 0))$ est ainsi une base de G.
2. Remarquons déjà que le cardinal de la famille considérée est égal à $n + 1$, soit la dimension de $\mathbf{R}_{n+1}[X]$. Il reste donc à prouver que cette famille est libre.
   Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P^{(k)}(X) = 0$.
   Notons $P(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, avec $a_n \neq 0$ (le polynôme étant de degré n).
   Alors : $0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P^{(k)}(X) = a_n \lambda_0 X^n + Q(X)$ où Q est un polynôme de degré $n - 1$.
   Or : $1, X, \ldots, X^n)$ est une base [18], donc une famille libre, de $\mathbf{R}^n$.
   Donc : $a_n \lambda_0 = 0$ soit $\lambda_0 = 0$ (puisque $a_n \neq 0$).
   Donc : $0 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k P^{(k)}(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k+1} P^{(k+1)}$.
   En itérant [19] le processus précédent (chaque polynôme $P^{(k)}$ est de degré $n - k$ exactement), on montre que pour tout $k \in [1; n], \lambda_k = 0$.
   On en déduit que la famille $(P^{(k)})_{k \in [0;n]}$ est libre et donc constitue une base de $\mathbf{R}_n[X]$.
3. - Soit $u = (x, y, z) \in ker(H)$.
     Alors $H(u) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y + z & = & 0 \\ x + y + z & = & 0 \\ x & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & -z = -t \\ z & = & t \end{array} \right.$ où l'on pose $z = t$ comme paramètre.
     On reconnaît la représentation paramétrique d'une droite de vecteur directeur $(0; -1; -1)$, qui est donc une base de $ker(H)$.
     Par ailleurs, on en déduit que $dim(ker(H)) = 1$.
   - D'après le théorème du rang, on en déduit que $rg(H) = 2$.
     Or $a = (1+1, 0+1+1, 0) = (2, 2, 0) \in Im(H)$ (d'antécédent $u = (0, 1, 1)$) et $b = (1+0, 1+1+0, 1) = (1, 2, 1) \in Im(H)$ (d'antécédent $(w = (1, 1, 0))$.
     Comme a et b sont libres [20], (a, b) est une base [21] de $Im(H)$.

Solution exercice 10.20

1. En multipliant un polynôme par un coefficient, tous ses termes sont multipliés par son coefficient. On en déduit assez aisément que Φ est effectivement linéaire.
2. Soit $Q \in ker(\Phi)$.
   Alors $Q(a_0) = \ldots = Q(a_n) = 0$.
   Donc : Q admet au moins $n + 1$ racines.
   Or Q est de degré n.
   Q est donc le polynôme nul.
   Par suite, $ker(\Phi) = 0_{\mathbf{K}_n[x]}$ et donc Φ est injective.
3. Comme on est dans des espaces vectoriels de dimension finie, Φ est également bijective.
   Comme $(b_0, \ldots, b_n) \in K^{n+1}$, il existe (car Φ surjective) un unique (car Φ injective) $P \in K_n[X]$ tel que $\Phi(P) = (b_0, \ldots, b_n)$. D'où la conclusion.

18. Rappelons qu'il s'agit même de la base canonique, voir chapitre 8.
19. En toute rigueur, la démonstration devrait être menée par récurrence - cette étape correspondant à l'hérédité.
20. car non colinéaires
21. comme famille libre ayant un cardinal égal à la dimension de $Im(H)$.

Chapitre 12

Notations usuelles et prérequis

12.1 Notations usuelles

Ci-après la synthèse de notations usuelles employées en mathématiques et présentes dans cet ouvrage.

• ▲ : propre à ce document, signale un exercice (un peu) plus difficile que les autres.

• **N** : ensemble des entiers naturels (entiers positifs ou nul). A noter que vous l'avez déjà vu sous la forme $\mathbb{N}$. On note avec la double barre à l'écrit pour symboliser la mise en gras typographique. De même pour les autres ensembles de nombres.

• $\mathbf{N}^\star$: ensemble des éléments non nuls de **N**. Se généralise aux autres ensembles. A noter que la notation vient des anneaux. En effet, si A est un anneau, on note $A^\star$ l'ensemble des éléments inversibles de A, c'est à dire l'ensemble des éléments de A pour lesquels on peut trouver un inverse. Or 0 est le seul réel qui n'admette pas d'inverse : d'où la notation.

• **Z** : ensemble des entiers relatifs (entiers négatifs, positifs ou nul).

• **Q** : ensemble des nombres rationnels (nombre s'écrivant comme quotient d'entiers).

• **R** : ensemble des nombres réels (réunion de **Q** et des nombres irrationnels, tels $\sqrt{2}$, π ou encore e^1)

• **C** : ensemble des nombres complexes. C'est l'ensemble des nombres z pour lesquels il existe un couple $(a;b)$ de réels tels que $z = a + ib$, où i est défini comme le nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$.

• $Re(z)$ et $Im(z)$: pour un complexe z dont la forme algébrique est $z = a + ib$, $Re(z) = a \in \mathbf{R}$ est la partie réelle de z et $Im(z) = b \in \mathbf{R}$ est la partie imaginaire de z. Un réel est donc un nombre pour lequel la partie imaginaire est nul. De même, un imaginaire pu est un nombre complexe pour lequel la partie réelle est nulle.

• $\mathbf{R}^2$: $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Dit autrement, $X \in \mathbf{R}^2 \Leftrightarrow \exists (x;y) \in \mathbf{R}^2 : X = (x;y)$. Adaptable aux autres ensembles de nombres, tel $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{Z}^3$.

• $\forall$: Pour tout

• $\exists$: Il existe

• $P \Rightarrow Q$: P implique Q (si P est vrai alors Q l'est aussi).

• $P \Leftrightarrow Q$: P et Q sont équivalents.

• $\in$: appartient à (utilisé quand on veut parler d'un élément, comme un point, par rapport à un ensemble, comme une droite)

• $\subset$: est inclus dans (utilisé quand on veut parler d'un ensemble, comme une droite, par rapport à un autre ensemble, comme un plan).

• $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto f(x)$: cela signifie que la fonction f est définie de l'ensemble des réels **R** dans **R**, et que pour tout réel x, l'image de x vaut $f(x)$. Cela correspond à la notation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rccc} f: & \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$$

• $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$, sous la condition que les images par f soient comprises dans l'ensemble de définition de g.

• $vect(A)$: le sous-espace vectoriel engendré par A, à savoir l'intersection des sev de E contenant A.

• $\mathcal{L}(E, F)$: ensemble des applications linéaires de E dans F.

• $f(A) : \{y \in F, \exists x \in A : f(x) = y\}$ (pour $f : E \to F$ avec $A \subset E$).

• $f^{-1}(B) : \{x \in E, \exists y \in B : f(x) = y\}$ (pour $f : E \to F$ avec $B \subset F$).

- $A + B$: $\{x \in E : \exists (a, b) \in A \times B : x = a + b\}$, avec $A \subset E$ et $B \subset E$.
- $\mathbf{K}[X]$: ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$ à une indéterminée (X).
- $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$: somme pour k allant de 0 jusqu'à n des $a_k X^K$.

Peut également s'écrire : $a_0 X^0 + a_1 X^1 + ... + a_n X^n$ (écriture moins juste dans le sens où n n'est pas forcément supérieur à 1 et pourrait valoir 0). À adapter suivant le contexte.

- $\prod_{i=1}^{s} (X - a_i)^{\alpha_i}$: produit pour i allant de 1 jusqu'à s des $(X - a_i)^{\alpha_i}$.

Peut également s'écrire : $(X - a_1)^{\alpha_1} \times (X - a_2)^{\alpha_2} \times \cdots \times (X - a_s)^{\alpha_s}$ (là aussi, il s'agit d'une écriture moins juste). À adapter suivant le contexte.

- $k!$: se lit "k factoriel" ou "la factorielle de k". Pour $k \in \mathbf{N}^\star$, C'est le produit de tous les entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux à k. Par exemple, $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. Par convention, $0! = 1$.
- $card(A)$: cardinal d'un ensemble discret A. C'est le nombre d'éléments constituant l'ensemble A. Par exemple, si $A = \{1; 3; 17\}$, $card(A) = 3$.

En bonus, quelques abréviations usuelles :

- "IPP" : intégrations par parties (chapitre 4).
- "sev" : sous-espace vectoriel (chapitre 5). D'ailleurs, "ev" signifie espace vectoriel.
- "i.e." : signifie "id est", locution latine signifiant "c'est à dire". À noter qu'il s'agit d'une abréviation standard, au même titre que "etc".

12.2 Prérequis

Concernant les pré requis, j'ai essayé que ceux-ci soient réduits au minimum. Néanmoins, des notions du programme de TS interviennent fatalement. En résumé :

1. Aucun pré requis pour le chapitre "Quelques éléments de logique". Il est traitable en 1èreS sauf l'exercice sur les complexes et la question utilisant le théorème de Bezout).

2. Peu ou prou pas de pré requis nécessaire pour le chapitre "Structure algébrique".

3. Peu de pré requis pour le chapitre sur les fonctions usuelles mais il est préférable d'avoir une solide idée de la dérivation. Avoir déjà fait le chapitre exponentielle facilite les raisonnements.

4. Il faut avoir traité intégralement (si j'ose dire) les chapitres sur les intégrales et les primitives pour prétendre s'attaquer au chapitre "quelques calculs d'intégrales atypiques".

5. Il faut avoir vu la fonction exponentielle pour traiter les "équations différentielles d'ordre 1". La résolution d'équation de degré 2 à discriminant négatif est également un impératif pour la partie sur les équations différentielles d'ordre 2.

6. Peu ou prou pas de pré requis pour le chapitre "Espace vectoriel" (mais je m'appuie sur des notions intuitives de géométrie dans l'espace). Attention, la difficulté et l'abstraction augmente sérieusement avec ce chapitre.

7. Le chapitre "Polynôme" ne peut être correctement abordé sans avoir vu $\mathbf{C}$ et notamment les résolutions des équations de degré 2 dans $\mathbf{C}$.

8. Le chapitre "Espace vectoriel" est un pré requis au chapitre "Espace vectoriel en dimension finie".

12.3 Bibliographie/sitographie

- `https://www.math.u-psud.fr/~rumin/enseignement/S2PMCP/4-Basesetdimension.pdf`, cours sur les espaces vectoriels de dimension finie de de M.RUMIN réécrit par J.KULCSAR
- Diverses pages Wikipédia, qui est très bien fourni en mathématiques. Je confesse ne pas les avoir notées au fur et à mesure.
- `http://www.physagreg.fr/electrocinetique/ec3/EC3-rlc-serie.pdf`, sur les circuits RLC & co.
- Document de l'IREM d'Orléans pour le chapitre 1.
- Le site de l'APMEP pour les annales de baccalauréat.
- Le "Dictionnaire des mathématiques", écrit par Alain Bouvier, Michel George, François le Lionnais aux éditions puf (3ème édition).
- "Les maths au quotidien", écrit par Matthieu Colonval et Abdelatif Roumadni, aux éditions ellipses.
- "Probabilités 1", écrit par Jean-Yves Ouvrard, aux éditions Cassini, 2ème édition de 2016 (pour la partie probabilités de la section dénombrement).

Remerciements

Un grand merci à tous ceux qui, de près ou de loin, ont collaboré à ce projet. En 2016-2017 , ils étaient tous enseignants au lycée de Sens mais la vie en a porté quelques-uns dans d'autres contrées, une fois !

Un grand merci notamment à Mme Sassiat pour le regard mathématiques et les corrections qu'elle a pus apporter au présent ouvrage.

Mathématiquement vôtre, Vanwalleghem Olivier