Corrigé du Sujet 0 d'entraînement au baccalauréat blanc de mathématiques de Janvier 2022

Exercice 1 (5 points)

1. **a.** $u_1 = u_0 + v_0 = 1 + 1 = 2$ et $v_1 = 2 \times u_0 + v_0 = 2 \times 1 + 1 = 3$.

b. Pour tout n, $v_{n+1} = 2u_n + v_n$ donc $v_{n+1} - v_n = 2u_n$.

On a admis que la suite (u_n) était strictement positive donc, pour tout n, $u_n > 0$; on en déduit que, pour tout n, $v_{n+1} - v_n > 0$ donc que la suite (v_n) est strictement croissante.

La suite (v_n) est strictement croissante donc, pour tout n, $v_n \geqslant v_0$ donc $v_n \geqslant 1$.

c. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : $u_n \geqslant n + 1$.

On démontre cette propriété par récurrence.

- **Initialisation**

  Pour $n = 0$, $u_n = u_0 = 1$ et $n + 1 = 1$ donc $u_n \geqslant n + 1$; $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité**

  Soit n un entier naturel.

  On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie (hypothèse de récurrence) et on va démontrer que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

  $\mathcal{P}_n$ vraie équivaut à $u_n \geqslant n + 1$.

  $u_{n+1} = u_n + v_n$; or $u_n \geqslant n + 1$ et, d'après la question 1.b, $v_n \geqslant 1$. On en déduit que $u_{n+1} \geqslant n + 2$ et donc que la propriété est vraie au rang $n + 1$.

- **Conclusion**

  La propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n + 1$.

d. Pour tout n, $u_n \geqslant n + 1$; or $\lim\limits_{n \to +\infty} n + 1 = +\infty$, donc par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2. On pose, pour tout entier naturel n : $r_n = \dfrac{v_n}{u_n}$. On admet que : $r_n^2 = 2 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$.

a. $(-1)^{n+1}$ vaut soit -1, soit 1 selon la parité de n ; donc $-1 \leqslant (-1)^{n+1} \leqslant 1$.

On sait que $u_n > 0$ donc $u_n^2 > 0$.

On divise par u_n^2 et on obtient : $-\dfrac{1}{u_n^2} \leqslant \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \dfrac{1}{u_n^2}$.

b. On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^2 = +\infty$.

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{u_n^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{u_n^2} = 0$.

On sait de plus que, pour tout n : $-\dfrac{1}{u_n^2} \leqslant \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \dfrac{1}{u_n^2}$.

Donc, d'après le théorème des gendarmes, on peut dire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} = 0$.

c. $r_n^2 = 2 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} = 0$, donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n^2 = 2$.

On peut en déduire que la suite (r_n) converge vers $\sqrt{2}$

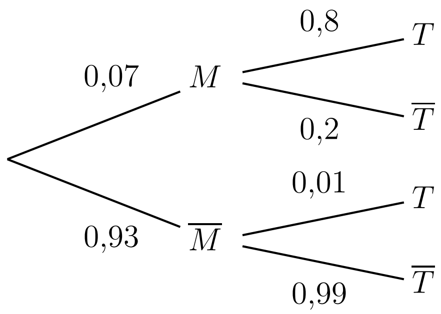
d. Pour tout entier naturel n,

$$r_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{2u_n + v_n}{u_n + v_n} = \frac{u_n\left(2 + \dfrac{v_n}{u_n}\right)}{u_n\left(1 + \dfrac{v_n}{u_n}\right)} = \frac{2 + \dfrac{v_n}{u_n}}{1 + \dfrac{v_n}{u_n}} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n}.$$

e. La valeur de n renvoyée par ce programme est 5.
Elle correspond à la plus petite valeur de n pour laquelle la distance entre r_n et $\sqrt{2}$ est inférieure ou égale à 10^{-4}.

Exercice 2 (5 points)

1. On construit un arbre pondéré modélisant la situation proposée :



2. **a.** On a $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$.

b. On a de même $P\left(\overline{M} \cap T\right) = P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,93 \times 0,01 = 0,0093$.
D'après la formule des probabilités totales :
$P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0,056 + 0,0093 = 0,0653$.

3. On calcule $P_T(M) = \dfrac{P(T \cap M)}{P(T)} = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,056}{0,0653} \approx 0,85758$ soit $0,86$ à 10^{-2} près.

4. **a.** On répète $n = 10$ fois la même expérience de manière identique et indépendante : "voir si la personne a un test positif". Cette expérience a deux issues :

- le succès S "la personne a un test positif", de probabilité 0,0653 (d'après la question 2)b)).
- l'échec $\overline{S}$

Comme X compte le nombre de succès parmi les 10 répétitions, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ avec $p = 0,0653$.

b. On a $P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1 - 0,0653)^{10-2} = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times 0,9347^8 =$
$45 \times 0,0653^2 \times 0,9347^8 \approx 0,1118$, soit $0,11$ à 10^{-2} près.

5. On a $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,0653^0 \times (1 - 0,0653)^n = 1 - 0,9347^n$ et on veut que :
$P(X \geqslant 1) > 0,99 \iff 1 - 0,9347^n > 0,99 \iff 0,01 > 0,9347^n$ soit en prenant le logarithme népérien qui est strictement croissant sur $]0\,;\,+\infty[$:
$\ln 0,01 > n \ln 0,9347 \iff \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,9347} < n$.
Or $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,9347} \approx 68,2$. Il faut donc tester au moins 69 personnes au minimum.

Exercice 3 (5 points)

Partie 1 : Étude d'une fonction auxiliaire

1. **a.** Sur l'intervalle $[1\,;\,4]$, $\quad f'(x) = -30 + \dfrac{35}{x} = \dfrac{-30x + 35}{x} = \dfrac{35 - 30x}{x}$.

b. Puisque $1 \leqslant x \leqslant 4$, $\; x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $35 - 30x = 5(7 - 6x)$ donc du facteur $7 - 6x$.
Or : $7 - 6x > 0 \iff 7 > 6x \iff \dfrac{7}{6} > x \iff x < \dfrac{7}{6}$.
On en déduit le tableau suivant :

x	1		$7/6$		4
$f(x)$		$+$	0	$-$	

c. La fonction f est donc croissante sur $\left[1\ ;\ \dfrac{7}{6}\right]$, décroissante sur $\left[\dfrac{7}{6}\ ;\ 4\right]$ et a donc un maximum : $f\left(\dfrac{7}{6}\right) = -30 \times \dfrac{7}{6} + 50 + 35\ln\dfrac{7}{6} = -35 + 50 + 35\ln\dfrac{7}{6} = 15 + 35\ln\dfrac{7}{6} \approx 20,4$.

2. $\star$ Sur $[1\ ;\ 7/6]$, le minimum de f est 20 donc $f(x) = 0$ n'admet aucune solution.

$\star$ f décroit sur $\left[\dfrac{7}{6}\ ;\ 4\right]$ de $f\left(\dfrac{7}{6}\right) = 15+35\ln\dfrac{7}{6} \approx 20,4$ à $f(4) = -120+50+35\ln 4 = 35\ln 4-70 \approx -21,5$.

x	1		$\frac{7}{6}$		α		4
f			$\approx 20,4$				
		$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	
	20						$\approx -21,4$

Sur l'intervalle $\left[\dfrac{7}{6}\ ;\ 4\right]$, f est continue et strictement décroissante.

Comme $0 \in \left[f\left(\frac{7}{6}\right)\ ;\ f(4)\right]$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires, un réel unique α de cet intervalle tel que $f(\alpha) = 0$.

- On a $f(2) \approx 14,26$ et $f(3) \approx -1,54$, donc $2 < \alpha < 3$;
- On a $f(2,9) \approx 0,26$ et $f(3,0) \approx -1,54$, donc $2,9 < \alpha < 3,0$;
- On a $f(2,91) \approx 0,09$ et $f(2,92) \approx -0,09$, donc $2,91 < \alpha < 2,92$;
- On a $f(2,914) \approx 0,0013$ et $f(2,915) \approx -0,005$, donc $2,914 < \alpha < 2,915$.

3. D'une part, le minimum de f sur $\left[1\ ;\ \dfrac{7}{6}\right]$ est 20 alors $f(x) \geqslant 0$ sur cet intervalle.

D'autre part, f est décroissante sur $\left[\dfrac{7}{6}\ ;\ 4\right]$ et $f(\alpha) = 0$.

On a donc $f(x) \geqslant 0$ sur $[1\ ;\ \alpha]$ et $f(x) \leqslant 0$ sur $[\alpha\ ;\ 4]$.

Partie 2 : Optimisation

1. 2500 litres correspondent à $x = 2,5$ et $B(2,5) = -15\times 2,5^2 + 15\times 2,5 + 35\times 2,5\times\ln 2,5 \approx 23,9254$ soit environ 23925 €.

2. La fonction B est dérivable sur $[1 ; 4]$ et sur cet intervalle :

$B'(x) = -30x + 15 + 35\ln x + 35x \times \dfrac{1}{x} = 50 - 30x + 35\ln x = f(x)$.

3. **a.** D'après la partie 1, $f(x) = B'(x) \geqslant 0$ sur $[1\ ;\ \alpha]$: la fonction B est donc croissante sur $[1\ ;\ \alpha]$.
De même $f(x) = B'(x) \leqslant 0$ sur $[\alpha\ ;\ 4]$: la fonction B est donc décroissante sur $[1\ ;\ \alpha]$.
Conclusion : $B(\alpha)$ est le maximum de la fonction B sur l'intervalle $[1 ; 4]$.

b. $B(\alpha) = -15\alpha^2 + 15\alpha + 35\alpha\ln\alpha$.
En utilisant la valeur approchée de α trouvée dans la partie 1, on a :
$B(\alpha) \approx -15 \times 2,914^2 + 15 \times 2,914 + 35 \times 2,914 \times \ln 2,914 \approx 25,4201$, soit environ 25420 € à l'euro près.
Il faut donc que l'entreprise vende 2914 litres de jus de fruits pour faire un bénéficie maximal.

Exercice 4 (5 points)

1. Pour $t = 0$ dans la représentation paramétrique de d_1, on obtient $x = 2$; $y = 3$ et $z = 0$ donc **A(2 ; 3 ; 0) appartient à $\mathbf{d_1}$**.

2. a. Notons $H(x_H\ ;\ y_H\ ;\ z_H)$ le projeté orthogonal de A sur (d_2). Comme $H \in (d_2)$, il existe un réel t tel que $\left\{\begin{array}{l c l} x &=& -5+2t\\ y &=& -1+t\\ z &=& 5\end{array}\right.$. Ainsi $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-5+2t-2\\-1+t-3\\5-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}2t-7\\t-4\\5\end{pmatrix}$.

   $\star$ Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (d_2).

   Alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AH} = 0 \Leftrightarrow 2(2t-7)+1(t-4)+0\times 5 = 0 \Leftrightarrow 5t-18 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{18}{5} = 3,6$.

   En remplaçant t par $3,6$, on trouve que H a pour coordonnées $(2,2\ ;\ 2,6\ ;\ 5)$.

   b. La distance de A à d_2 est AH.

   Or, d'après la question précédente, $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}0,2\\-0,4\\5\end{pmatrix}$.

   La distance de A à d_2 est donc $AH = \sqrt{(0,2)^2+(-0,4)^2+5^2} = \sqrt{25,2}$.

3. On sait que dans la représentation paramétrique d'une droite, les coefficients de x, y et z donnent les coordonnées d'un vecteur directeur de cette droite.

   On en déduit que $\boxed{\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}$ est un vecteur directeur de d_1 et $\boxed{\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}}$ est un vecteur directeur de d_2.

   $\dfrac{2}{1} \neq \dfrac{1}{-1}$ donc les coordonnées ne sont pas proportionnelles : les deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires donc les deux droites d_1 et d_2 ne sont **pas parallèles**.

4. Soit le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u_1} = 1+2-3 = 0$ donc $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u_1}$.
   $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u_2} = 2-2+0 = 0$ donc $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u_2}$.
   $\overrightarrow{v}$ est bien orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

5. a. Avec $t' = 4$, on vérifie que $B \in (d_2)$.

   b. Δ a pour représentation paramétrique : $\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = 3+k\\ y = 3-2k\\ z = 5-3k\end{array}\right. ,\ k \in \mathbb{R}}$.

   c. On cherche si d_1 et Δ sont sécantes. Si c'est le cas, il existe t et k réels tels que :
   $$\left\{\begin{array}{l} 2+t = 3+k\\ 3-t = 3-2k\\ t = 5-3k\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} t = 5-3k\\ 2+5-3k = 3+k\\ 3+3k-5 = 3-2k\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} t = 5-3k\\ k = 1\\ k = 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} k = 1\\ t = 2\end{array}\right. .$$
   En remplaçant k par 1 ou t par 2, on obtient que les deux droites ont un seul point d'intersection : $\boxed{C(4\ ;\ 1\ ;\ 2)}$.

   d. • D'après la question (3.) la droite Δ dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}$ est orthogonale aux droites d_1 et d_2.
   • D'après la question (5b.) les droites d_1 et Δ sont sécantes en un point $C(4\ ;\ 1\ ;\ 2)$.
   • Par ailleurs , le point B$(3\,;\,3\,;\,3)$ appartient à la droite Δ par définition (5.) et à la droite d_2 d'après la question (4b.)
   • Donc la droite Δ est sécante avec les deux droites d_1 et d_2 et orthogonale à ces deux droites ce qui répond au problème posé.