Sujet 0 d'entraînement au baccalauréat blanc de mathématiques de Janvier 2022

Rappel : la calculatrice est autorisée. Cependant, c'est au candidat de savoir la mettre en mode examen, devant les surveillants, au début de l'épreuve. L'épreuve dure 4h.

Exercice 1 (5 points)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 & = v_0 = 1 \\ u_{n+1} & = u_n + v_n \\ v_{n+1} & = 2u_n + v_n \end{cases}$$

Dans toute la suite de l'exercice, on **admet** que les suites (u_n) et (v_n) **sont strictement positives**.

1. **a.** Calculez u_1 et v_1.

b. Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante, puis en déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant 1$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant n + 1$.

d. En déduire la limite de la suite (u_n).

2. On pose, pour tout entier naturel n : $r_n = \dfrac{v_n}{u_n}$. On admet que : $r_n^2 = 2 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$

a. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$-\frac{1}{u_n^2} \leqslant \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \frac{1}{u_n^2}.$$

b. En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}.$$

c. Déterminer la limite de la suite (r_n^2) et en déduire que (r_n) converge vers $\sqrt{2}$.

d. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$r_{n+1} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n}.$$

e. On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
def seuil() :
    n = 0
    r = 1
    while abs(r-sqrt(2)) > 10**(-4) :
      r = (2+r)/(1+r)
      n = n+1
    return n
```

(abs désigne la valeur absolue, sqrt la racine carrée et 10** (-4) représente 10^{-4}).

La valeur de n renvoyée par ce programme est 5.

À quoi correspond-elle ?

Exercice 2 (5 points) Un test est mis au point pour détecter une maladie dans un pays.

Selon les autorités sanitaires de ce pays, 7 % des habitants sont infectés par cette maladie.

Parmi les individus infectés, 20 % sont déclarés négatifs.

Parmi les individus sains, 1 % sont déclarés positifs.

Une personne est choisie au hasard dans la population.

On note :

- M l'évènement : « la personne est infectée par la maladie » ;
- T l'évènement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
2. **a.** Quelle est la probabilité pour que la personne soit infectée par la maladie et que son test soit positif ?

   b. Montrer que la probabilité que son test soit positif est de 0,0653.
3. On sait que le test de la personne choisie est positif.
   Quelle est la probabilité qu'elle soit infectée ?
   On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.
4. On choisit dix personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
   On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre d'individus ayant un test positif parmi les dix personnes.

   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.

   b. Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif.
   On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.
5. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins une de ces personnes ait un test positif, soit supérieure à 99 %.

Exercice 3 (5 points)

Cet exercice est composé de deux parties.

Certains résultats de la première partie seront utilisés dans la deuxième.

Partie 1 : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;\,4]$ par :

$$f(x) = -30x + 50 + 35\ln x.$$

1. On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

   a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\,;\,4]$, montrer que :

   $$f'(x) = \frac{35 - 30x}{x}.$$

   b. Dresser le tableau de signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;\,4]$.

   c. En déduire les variations de f sur ce même intervalle.
2. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur l'intervalle $[1\,;\,4]$ puis donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

3. Dresser le tableau de signe de $f(x)$ pour $x \in [1\ ;\ 4]$.

Partie 2 : Optimisation

Une entreprise vend du jus de fruits. Pour x milliers de litres vendus, avec x nombre réel de l'intervalle $[1\,;\,4]$, l'analyse des ventes conduit à modéliser le bénéfice $B(x)$ par l'expression donnée en milliers d'euros par :

$$B(x) = -15x^2 + 15x + 35x\ln x.$$

1. D'après le modèle, calculer le bénéfice réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend 2500 litres de jus de fruits.

On donnera une valeur approchée à l'euro près de ce bénéfice.

2. Pour tout x de l'intervalle $[1\,;\,4]$, montrer que $B'(x) = f(x)$ où B' désigne la fonction dérivée de B.

3. **a.** À l'aide des résultats de la **partie 1**, donner les variations de la fonction B sur l'intervalle $[1\,;\,4]$.

b. En déduire la quantité de jus de fruits, au litre près, que l'entreprise doit vendre afin de réaliser un bénéfice maximal.

Exercice 4 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

On considère deux droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2+t \\ y &=& 3-t \\ z &=& t \end{array}\right., \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x &=& -5+2t' \\ y &=& -1+t' \\ z &=& 5 \end{array}\right., \quad t' \in \mathbb{R}.$$

On admet que les droites d_1 et d_2 sont non coplanaires.

Le but de cet exercice est de déterminer, si elle existe, une troisième droite Δ qui soit à la fois sécante avec les deux droites d_1 et d_2 et orthogonale à ces deux droites.

1. Vérifier que le point A$(2\,;\,3\,;\,0)$ appartient à la droite d_1.

2. Soit H le projeté orthogonal de A sur d_2.

a. Déterminer les coordonnées de H.

b. En déduire la distance de A à d_2.

3. Donner un vecteur directeur $\vec{u_1}$ de la droite d_1 et un vecteur directeur $\vec{u_2}$ de la droite d_2, puis dire si les droites d_1 et d_2 sont parallèles ou non.

4. Vérifier que le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$. ‘

5. On considère maintenant la droite Δ dirigée par le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$, et passant par le point B $(3\,;\,3\,;\,5)$.

a. Montrer que B appartient à d_2.

b. Donner une représentation paramétrique de cette droite Δ.

c. Les droites d_1 et Δ sont-elles sécantes ? Justifier la réponse.

d. Expliquer pourquoi la droite Δ répond au problème posé.