Activités rituelles TG

Olivier Vanwalleghem (olivier.vanwalleghem@ac-dijon.fr)

Dernière version : 24 mai 2021

Principe global

Début de question en commun :

Niveau 1	**Niveau 2**
Fin 1	Fin 2

Sommaire

A) Algorithmique et programmation

1. Si ... Alors ... Sinon

2. Pour i allant de ... à ...

3. Tant que ...

4. Écriture d'algorithmes

A.1 - Instruction conditionnelle : Si ... Alors ... Sinon

1. Que retourne la fonction ci-contre avec :

Niveau 1	**Niveau 1**
$A = 13\,?$	$A = 13\,?$

```
définir Rituel1(A) :
    B ← 3A
    si B est pair :
        retourner B
    sinon :
        retourner A
```

2. Que retourne la fonction ci-contre avec :

Niveau 2	**Niveau 2**
$A = 12\,?$	$A = 12\,?$

```
def Rituel2(A) :
    B=5*A
    if B>80 :
        return(A)
    else :
        return(B)
```

Début corrigé (méthode)

1. Si A est impair, par exemple si $A = 5$, alors $B = 3 \times 5 = 15$ est impair également. Dans ce cas on retourne A, c'est à dire 5.

Dans le cas où A est pair, par exemple si $A = 2$ alors $B = 3 \times 2 = 6$ est pair également. Dans ce cas on retourne B, c'est à dire 6.

2. Si $5 \times A > 80$, on retourne A. Si $5 \times A \leqslant 80$, on retourne B.

Fin corrigé

A.2 - Boucle bornée : Pour i allant de ... à ...

1. Que retourne la fonction ci-contre suivant avec :

Niveau 1	**Niveau 1**
$D = 3\,?$	$D = 11\,?$

définir **Rituel3**(D) :
- $C \leftarrow D$
- pour i allant de 1 à 3 :
  - $C \leftarrow 2C$
- retourner C

2. Que retourne la fonction ci-contre avec :

Niveau 2	**Niveau 2**
$N = 4\,?$	$N = 1\,?$

```
def Rituel4(N) :
    U=1000
    L=[U]
    for i in range(N) :
        U=0,5*U+i
        L=L+[U]
    return(L)
```

Début corrigé (résultat exact)

1. "Pour i allant de 1 à 3" signifie que l'on fera trois fois les calculs dans les boucles.

La réponse pour $D = 3$ est :

i		1	2	3
C	3	6	12	24

L'instruction Rituel3(3) retourne donc 24.

Fin corrigé

Début corrigé (méthode)

2. La valeur de N indique le nombre de tour de boucles que l'on effectue.

"for i in range N" signifie "pour i allant de 0 à $N-1$" (comme i commence par défaut à 0, pour faire N tours de boucle, il doit s'arrêter à $N-1$).

Pour $N = 3$, i ira de 0 à $3-1=2$. les variables U et L prennent les valeurs successives suivantes :

i		0	1	2
U	1000	$0{,}5 \times 1000 + 0 = 500$	$0{,}5 \times 500 + 1 = 251$	$0{,}5 \times 251 + 2 = 127{,}5$
L	[1000]	[1000,500]	[1000,500,251]	[1000,500,251,127.5].

L'algorithme retourne alors [1000,500,251,127.5].

À noter que cet algorithme correspond à la suite (u_n) définie par $u_0 = 1000$ et, pour tout entier naturel n,par $u_{n+1} = 0{,}5u_n + n$.

Fin corrigé

A.3 - Boucle non bornée : Tant que ...

1. Que retourne la fonction ci-contre avec :

Niveau 1	**Niveau 1**
$C = 44$?	$C = 52$?

définir **Rituel5**(C) :
- $D \leftarrow 2$
- tant que $D < C$:
  - $D \leftarrow 2D + 1$
- retourner D

2. Que retourne la fonction ci-contre avec :

Niveau 2	**Niveau 2**
$P = 12$?	$P = 17$?

```
def Rituel6(P) :
    U=1000
    N=0
    while U> 950 :
        U=U−N*P
        N=N+1
    return(N)
```

Début corrigé (méthode)

1. Pour $C = 25$ par exemple, les valeurs successives de D seront :

D	2	$2 \times 2 + 1 = 5$	$2 \times 5 + 1 = 11$	$2 \times 11 + 1 = 23$	$2 \times 23 + 1 = 47$

On calcule en effet tant que $D < 25$, c'est à dire jusqu'à avoir $D \geqslant 25$.

L'instruction Rituel5(25) retourne donc 47 (première valeur de D supérieur ou égal à 25).

De même, l'instruction Rituel5(25) retourne donc 19 (première valeur de D supérieur ou égal à 23).

Enfin, l'instruction Rituel5(11) retourne donc (première valeur de D supérieur ou égal à 11).

Fin corrigé

Début corrigé (résultat exact)

2. Pour $P = 12$, les valeurs successives de U et N seront (attention, pour le calcul de U, on prend à chaque fois la dernière valeur de N, qui est celle de la colonne précédente) :

U	1000	$1000 - 0 \times 12 = 1000$	$1000 - 1 \times 12 = 988$	$988 - 2 \times 12 = 964$	$964 - 3 \times 12 = 928$
N	0	$0 + 1 = 1$	2	3	4

L'instruction Rituel6(12) retourne donc 4 (la dernière valeur de N calculée).

Cela signifie que si l'on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - n \times 12$, le premier terme rang N tel que $u_N \leqslant 950$ est $N = 4$.

Fin corrigé

A.4 - Écriture d'algorithmes

1. Écrire une fonction de programmation permettant de retourner u_N.
2. Écrire une fonction de programmation permettant de déterminer le premier rang où la suite (u_n) devient strictement inférieure à -10^6.
3. Écrire une fonction de programmation permettant de retourner dans une liste les N premiers termes de la suite (u_n).
4. Écrire une fonction de programmation permettant de déterminer le premier rang où la suite (u_n) devient inférieure ou égale à K, où K est un paramètre rentré par l'utilisateur.

Niveau 1	**Niveau 2**	**Niveau 2**	**Niveau 3**
$u_0 = 31$	$u_0 = -32$	$u_1 = 33$	$u_2 = -82$
$u_{n+1} = -81u_n$	$u_{n+1} = 19u_n + 27$	$u_{n+1} = -87u_n + n$	$u_{n+1} = 33u_n - 2n$
pour $N = 5$	pour $N = 11$	N un paramètre	N un paramètre
en langage courant	en langage Python	en langage courant	en langage Python

Début corrigé (résultat exact)

Pour le niveau 1 :

1.
```
définir fonction() :
    U ← 31
    Pour i allant de 1 à 5 :
        U ← −81U
    retourner U
```

2.
```
définir fonction() :
    U ← 31
    N ← 0
    Tant que U ⩾ −10^6 :
        U ← −81U
        N ← N + 1
    retourner N
```

3.
```
définir fonction() :
    U ← 31
    L ← [U]
    Pour i allant de 1 à 5 :
        U ← −81U
        L ← L + [U]
    retourner L
```

4.
```
définir fonction(K) :
    U ← 31
    N ← 0
    Tant que U > K :
        U ← −81U
        N ← N + 1
    retourner N
```

Pour le niveau 2 :

1.
```
def fonction() :
    U = −32
    for i in range(11) :
        U = 19 ∗ U + 27
    return U
```

2.
```
def fonction() :
    U = −32
    N = 0
    while U >= −10 ∗ ∗6 :
        U = 19 ∗ U + 27
        N = N + 1
    return N
```

3.
```
def fonction() :
    U = −32
    L = [U]
    for i in range(11) :
        U = 19 ∗ U + 27
        L = L + [U]
    return L
```

4.
```
def fonction(K) :
    U = −32
    N = 0
    while U > K :
        U = 19 ∗ U + 27
        N = N + 1
    return N
```

Pour le niveau 2 :

1.
```
définir fonction(N) :
    U ← 33
    Pour i allant de 2 à N :
        U ← −87U + (i − 1)
    retourner U
```

La boucle va de 2 à N pour calculer u_1, u_2, …, u_N. L'indice dans la boucle est $i-1$ car pour calculer u_{n+1}, on fait $+n$ (et non $+(n+1)$).

2.
```
définir fonction() :
    U ← 33
    N ← 0
    Tant que U ⩾ −10^6 :
        U ← −87U + N
        N ← N + 1
    retourner N
```

3.
```
définir fonction(N) :
    U ← 33
    L ← [U]
    Pour i allant de 2 à N :
        U ← −87U + (i − 1)
        L ← L + [U]
    retourner L
```

4. Question laissée au lecteur.

Pour le niveau 3 :

1.
```
def fonction(N) :
    U = −82
    for i in range(3,N + 1) :
        U = 19 ∗ U − 2 ∗ (i − 1)
    return U
```

Ayant déjà calculé u_2, la boucle commence au rang 3. Par ailleurs, "for i in range(3,$N+1$)" signifie "pour i allant de 3 à $N+1$ exclus" soit "pour i allant de 3 à N".

2.
```
def fonction() :
    U = −82
    N = 0
    while U >= −10 ∗ ∗6 :
        U = 33 ∗ U − 2 ∗ N
        N = N + 1
    return N
```

3.
```
def fonction(N) :
    U = −32
    L = [U]
    for i in range(3,N + 1) :
        U = 19 ∗ U − 2 ∗ (i − 1)
        L = L + [U]
    return L
```

4. Question laissée à la lectrice.

Fin corrigé

B) Suites

1. Expression de suites

2. Récurrence

3. Limites

4. Suites majorées, minorées

5. $u_{n+1} = f(u_n)$

B.1 - Expression de suites

1. Déterminer l'expression de la suite (u_n) :

Niveau 1	**Niveau 1**	**Niveau 1**	**Niveau 1**
arithmétique	géométrique	arithmétique	géométrique
$u_0 = 38$	$u_0 = -16$	$u_1 = 36$	$u_2 = -95$
raison : -77	raison : 49	raison : -80	raison : 33

2. Déterminer l'expression de la somme des termes jusqu'à u_{42} des suites ci-dessus.

3. Déterminer l'expression de (a_n) en fonction de n, où (u_n) est la suite géométrique de raison 49 et de premier terme $u_0 = -16$:

Niveau 1	**Niveau 1**
$u_n = a_n - 15$	$u_n = -58a_n + 39$

Début corrigé (résultat exact)

1. $u_n = 38 + (-77)n$; $u_n = -16 \times (49)^n$; $u_n = 36 + (-80)(n-1)$; $u_n = -95 \times (33)^{n-2}$

2. Voir formules des sommes.

3. Pour tout entier naturel n, $a_n = u_n + 15 = -16 \times (49)^n + 15$. Même principe pour l'autre, on isole (a_n).

Fin corrigé

B.2 - Récurrence

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 64$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 17$.

Montrer par récurrence pour tout entier naturel n que :

Niveau 1	**Niveau 2**
$u_n = (n+8)^2$	$u_n \geqslant n^2 + 1$

Début corrigé (résultat exact)

1. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$: "$u_n = (n+8)^2$" est vraie.

⋆ **Initialisation**

Montrons que $P(0)$ est vraie.

D'une part, $u_0 = 64$.

D'autre part, $(0+8)^2 = 8^2 = 64$.

Donc $u_0 = (0+8)^2$.

Donc : $P(0)$ est vraie.

⋆ **Hérédité**

Soit n un entier naturel n. Supposons que $P(n)$ soit vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie également. Or :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n + 2n + 17 \\ & = & (n+8)^2 + 2n + 17 \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ & = & ... \\ & = & n^2 + 18n + 81 \end{array}$$

D'autre part, $(n+1+8)^2 = (n+9)^2 = \ldots = n^2 + 18n + 81$.

Donc : $P(n+1)$ est vraie.

⋆ **Conclusion**

$P(0)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Donc, pour tout entier naturel n, $u_n = (n+8)^2$.

2. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$: "$u_n \geqslant (n+1)^2$" est vraie.

⋆ **Initialisation**

Montrons que $P(0)$ est vraie.

D'une part, $u_0 = 64$.

D'autre part, $0^2 + 1 = 1$.

Donc $u_0 \geqslant 0^2 + 1$.

Donc : $P(0)$ est vraie.

⋆ **Hérédité**

Soit n un entier naturel n. Supposons que $P(n)$ soit vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie également.

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{array}{rrcl} & u_n & \geqslant & n^2 + 1 \\ \Leftrightarrow & u_n + 2n + 17 & \geqslant & n^2 + 1 + 2n + 17 \\ \Leftrightarrow & u_{n+1} & \geqslant & n^2 + 2n + 18 \end{array}$$

D'autre part, $(n+1)^2 + 1 = \ldots = n^2 + 2n + 2$.

Or : $n^2 + 2n + 18 \geqslant n^2 + 2n + 2$.

Donc : $u_{n+1} \geqslant (n+1)^2 + 1$.

Donc : $P(n+1)$ est vraie.

⋆ **Conclusion**

$P(0)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Donc, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n^2 + 1$.

Fin corrigé

B.3 - Limites

1. Déterminer les limites suivantes :

Niveau 1	**Niveau 1**	**Niveau 2**	**Niveau 3**
$10n-4$	$-n^2+\dfrac{4210}{n}$	n^2-710n	$\dfrac{n^2-810n}{-10n^2+89n+110}$

Niveau 2	**Niveau 2**	**Niveau 2**
$\dfrac{\cos(n)}{10n}$	$410+\dfrac{(-1)^n}{-210n}$	$10\sin(n)-n.$

2. Soit (a_n) et (b_n) les suite définies pour tout entier naturel n par $a_n = 0{,}4-0{,}10^n$ et $b_n = 1{,}10^n - 100^{100}$. Déterminer :

Niveau 1	**Niveau 2**	**Niveau 3**
les limites de (a_n) et (b_n)	une fonction de programmation retournant une liste contenant les N premiers termes de (a_n)	une fonction de programmation retournant le premier rang N tel que $b_N > -100^{100}+10^{110}$ puis trouver le résultat par le calcul.

$\boxed{\textit{Début corrigé (résultat exact)}}$

Étant donné la longueur de rédaction des limites, les justifications ici sont abrégées.

1. $\star$ $+\infty$; $-\infty$; $+\infty$ (factorisation par n^2).

$\star$ Pour $n \neq 0$, $\dfrac{n^2-810n}{-10n^2+89n+110} = \dfrac{n^2\left(\dfrac{n^2}{n^2}-\dfrac{810n}{n^2}\right)}{n^2\left(\dfrac{-10n^2}{n^2}+\dfrac{89n}{n^2}+\dfrac{110}{n^2}\right)} = \dfrac{n^2\left(1-\dfrac{810}{n}\right)}{n^2\left(-10+\dfrac{89}{n}+\dfrac{110}{n^2}\right)} = \dfrac{1-\dfrac{810}{n}}{-10+\dfrac{89}{n}+\dfrac{110}{n^2}}$.

On en déduit que le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers -10.

Donc : $\lim\limits_{n\Longrightarrow+\infty} \dfrac{n^2-810n}{-10n^2+89n+110} = \dfrac{1}{-10}$.

$\star$ Comme $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$, pour $n \neq 0$, $\dfrac{-1}{10n} \leqslant \dfrac{\cos(n)}{10n} \leqslant \dfrac{1}{10n}$. Or $\lim\limits_{n\Longrightarrow+\infty} \dfrac{-1}{10n} = 0$ et $\lim\limits_{n\Longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{10n} = 0$. Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\Longrightarrow+\infty} \dfrac{\cos(n)}{10n} = 0$

$\star$ Par un raisonnement similaire ($-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ et $-1 \leqslant sin(n) \leqslant 1$),

alors $\lim\limits_{n\Longrightarrow+\infty} 410 + \dfrac{(-1)^n}{-210n} = 410$ (théorème des gendarmes) et $\lim\limits_{n\Longrightarrow+\infty} 10\sin(n) - n = -\infty$ (théorème de comparaison).

2. $\star$ Comme $-1 < 0{,}10 < 1$, $\lim\limits_{n\Longrightarrow+\infty} 0{,}10^n = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\Longrightarrow+\infty} a_n = 0{,}4$.

$\star$ Comme $1{,}10 > 1$, $\lim\limits_{n\Longrightarrow+\infty} 1{,}10^n = +\infty$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\Longrightarrow+\infty} b_n = +\infty$

$\star$ Pour les algorithmes, voir la section "Algorithmique et programmation".

Enfin : $b_N > -100^{100} + 10^{110} \Leftrightarrow 1{,}10^n - 100^{100} > -100^{100} + 10^{110} \Leftrightarrow 1{,}10^n > 10^{110} \Leftrightarrow \ln(1{,}10^n) > \ln(10^{110})$ car ln est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[\Leftrightarrow$ $n\ln(1{,}10) > 110\ln(10) \Leftrightarrow n > \dfrac{110\ln(10)}{\ln(1{,}10)}$ car $\ln(1{,}10) > \ln(1) = 0$.

Il suffit ensuite de trouver le premier entier strictement supérieur à $\dfrac{110\ln(10)}{\ln(1{,}10)}$. Le calcul est laissé aux lecteurs amoureux des valeurs numériques.

$\boxed{\textit{Fin corrigé}}$

B.4 - Suites majorées et minorées

1. À quelle condition une suite majorée converge ?

2. À quelle condition une suite décroissante diverge ?

3. Vrai ou faux ? Toute suite minorée converge.

4. Vrai ou faux ? Si (u_n) converge, elle est bornée.

5. Vrai ou faux ? Si (u_n) converge vers L, elle est majorée par L.

6. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{90u_n}$.

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 90$.

b. En déduire le sens de variations de (u_n).

On pourra par exemple factoriser par $\sqrt{u_n}$.

c. En déduire que (u_n) converge.

Début corrigé (résultat exact)

1. Si elle est croissante ou décroissante minorée.
2. Si elle n'est pas minorée.
3. Faux. Contre-exemple : $a_n = n$ est minorée par 0 mais diverge.
4. Vrai. Les seules suites non bornées sont les suites divergentes vers ∞.
5. Faux si la suite est décroissante par exemple.
6. **a.** La démonstration se fait par récurrence. En résumé :
   Initialisation
   $u_0 = 1$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 90$.
   Hérédité
   [phrases habituelles]
   D'après l'hypothèse de récurrence, $0 \leqslant u_n \leqslant 90$.
   Donc : $0 \leqslant 90u_n \leqslant 90^2$.
   Comme la fonction racine carrée est strictement croissante, on obtient alors $\sqrt{0} \leqslant \sqrt{90u_n} \leqslant \sqrt{90^2}$, soit $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 90$.
   Puis **Conclusion**.

   b. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \sqrt{90u_n} - u_n = \sqrt{90u_n} - \sqrt{u_n}\sqrt{u_n}$ car $u_n \geqslant 0$.
   D'où : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n}\left(\sqrt{90} - \sqrt{u_n}\right)$.
   Comme $u_n \leqslant 90$, alors, par croissance de la fonction racine carrée, $\sqrt{90} \geqslant \sqrt{u_n}$. On en déduit que la suite (u_n) est croissante.

   c. Comme (u_n) est une suite croissante majorée, elle converge.

Fin corrigé

B.5 - $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -0{,}90$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$.

a. Calculer u_1.

b. Démontrer que la suite est croissante.

c. Soit la fonction f définie sur $[-1\ ;\ 0]$ telle que $f(u_n) = u_{n+1}$.
Démontrer que si $x \in [-1\ ;\ 0]$ alors $f(x) \in [-1\ ; 0\ ]$.

d. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \in [-1\ ;\ 0]$.

e. En déduire que (u_n) converge ainsi que la valeur de sa limite.

2. Soit u_n la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 0{,}5$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{90}u_n + \dfrac{1}{90}$.
En vous inspirant de la démarche précédente :

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \in [0\ ;\ 1]$.

b. Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Début corrigé (résultat exact)

1. **a.** $u_1 = u_0^2 + u_0$.

b. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geqslant 0$ donc (u_n) est bien croissante.

c. $f : x \mapsto x^2 + x$, dérivable sur $[-1;0]$, de dérivée $f' : x \mapsto 2x + 1$.

Donc : $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1/2$.

D'où le tableau suivant :

x	-1		$-0,5$		0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-0,25$	$\nearrow$	0

D'après la tableau de variations, si $x \in [-1;0]$ alors $f(x) \in [-0,25;0]$.

En particulier, $f(x) \in [-1;0]$.

d. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$: "$u_n \in [-1;0]$" est vraie.

$\star$ **Initialisation** $u_0 = -0,90 \in [-1;0]$ donc $P(0)$ est vraie.

$\star$ **Hérédité** Soit n un entier naturel. Supposons que $P(n)$ soit vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie également.

Comme $u_n \in [-1;0]$ d'après l'hypothèse de récurrence, alors $f(u_n) \in [-1\ ;\ 0]$ d'après la question précédente soit $u_{n+1} \in [-1\ ;\ 0]$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

$\star$ **Conclusion**

La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire. donc, pour tout entier naturel n, $u_n \in [-1;0]$.

e. (u_n) est croissante et majorée par 0. Elle est donc convergente et sa limite L est solution de l'équation $L = L^2 + L \Leftrightarrow L^2 = 0 \Leftrightarrow L = 0$.

2. **a.** En deux mots, il faut considérer la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{90}x + \dfrac{1}{90}$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

On étudie ses variations, en en déduit que $f(x) \in [0\ ;\ 1]$ si $x \in [0\ ;\ 1]$ puis la même récurrence que précédemment nous donne l'encadrement voulu.

b. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \left(\dfrac{1}{90} - 1\right) u_n + \dfrac{1}{90}$.

c. Donc : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-89u_n}{90} + \dfrac{1}{90} = \dfrac{-89u_n + 1}{90}$. Or : $u_n \leqslant 1$ d'après la question précédente donc $-89u_n \leqslant -89$.

Par suite : $-89u_n + 1 \leqslant 0$. Comme $90 > 0$, on en conclut que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

Comme (u_n) décroît et est minorée par 0, (u_n) converge vers une limite L.

De plus, L est solution de l'équation $L = \dfrac{1}{90}L + \dfrac{1}{90} \Leftrightarrow 90L = L + 1 \Leftrightarrow L = \dfrac{1}{89}$

Fin corrigé

C) Probabilités et dénombrement

1. Probabilités conditionnelles

2. Loi binomiale

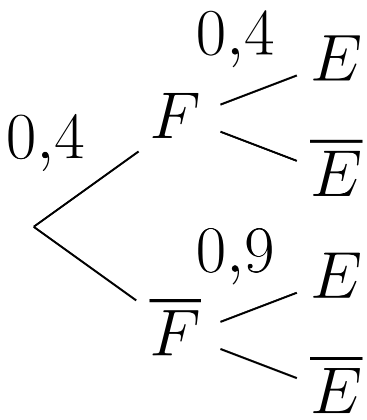
3. Somme de variables aléatoires

4. Dénombrement

5. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

C.1 - Probabilités conditionnelles

Dans un des contextes ci-dessous,



Contexte 1

	F	$\overline{F}$	Total
E	142		200
$\overline{E}$			800
Total		244	

Contexte 2

Déterminer la probabilité de :

Niveau 1	**Niveau 2**	**Niveau 2**
$P(F \cap E)$	$P(E)$	$P_E(\overline{F})$.

C.2 - Loi binomiale

Au sein d'une population, 57 % des habitants lave leur voiture une fois par semaine. On interroge 50 personnes et on compte le nombre de personnes lavant leur voiture une fois par semaine. La population est assez grande pour assimiler ce tirage à un tirage avec remise.

1. Modéliser le problème à l'aide d'une variable aléatoire X.

2. Déterminer les probabilités suivantes :

Niveau 1	**Niveau 1**	**Niveau 2**	**Niveau 2**
$P(X=23)$	$P(X \leqslant 22)$	$P(X \geqslant 29)$	$P(22 < X < 29)$

3. Déterminer les caractéristiques suivantes :

Niveau 1	**Niveau 1**	**Niveau 1**
$E(X)$	la moyenne des personnes lavant leur voiture	$\sigma(X)$

4. (**Niveau 2**) Déterminer a et b tels que $P(a < X < B) > 0{,}95$ et l'écart entre a et b est le plus petit possible.

5. (**Niveau 3**) Déterminer le plus petit n tel que $P(X \geqslant 1) > 0{,}999$.

C.3 - Sommes de variables aléatoires

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes dont on donne les lois de probabilités :

x_i	-3	2
$P(X = x_i)$	0,79	0,21

y_i	-2	-1	10
$P(Y = y_i)$	0,29	0,47	0,24

1. Calculer les espérances suivantes :

Niveau 1	**Niveau 1**	**Niveau 2**	**Niveau 2**
$E(X)$	$E(Y)$	$E(X+Y)$	$E(X-2Y)$

2. Calculer :

Niveau 1	**Niveau 1**	**Niveau 2**	**Niveau 2**	**Niveau 3**
$V(X)$	$V(Y)$	$V(X+Y)$	$V(X+2Y)$	$\sigma(X-2Y)$

3. Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon de taille n de variables aléatoires suivant la même loi que X. On note S_n leur somme et M_n leur moyenne. Calculer :

Niveau 2	**Niveau 2**	**Niveau 2**	**Niveau 2**	**Niveau 2**	**Niveau 2**
$E(S_n)$	$V(S_n)$	$\sigma(S_n)$	$E(M_n)$	$V(M_n)$	$\sigma(M_n)$

1. (**Niveau 1**) Soient A et B disjoints tels sur Card(A)=79 et Card(B)=29. Que valent Card($A \cup B$) et Card($A \cap B$) ?

2. (**Niveau 1**) Combien de codes différents peut-on faire avec trois chiffres compris entre 0 et 9 ?

3. (**Niveau 2**) Un porte-monnaie contient 79 pièces de monnaie toutes distinctes.

   a. De combien de façons peut-on les ranger ?

   b. De combien de manières peut-on trier 9 pièces parmi celles-ci ?

   c. On prend simultanément 9 pièces dans ce porte-monnaie.
   Combien y-a-t-il de combinaisons possibles ?

   d. Pour chacune des trois questions précédentes, identifier les cas où il s'agit : de combinaisons ; de $k-$ listes d'éléments distincts ; de permutations.

Début corrigé (résultat exact)

1. Comme ils sont disjoints, $Card(A \cup B) = card(A) + card(B) = 108$ et $Card(A \cap B) = 0$.

2. (permutations) $79!$

3. ($k-$ listes d'éléments distincts) $9 \times 8 \times 7$.

4. (combinaisons) $\binom{79}{9}$

Fin corrigé

C.5 - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $P(|X-E(X)|>\delta) \leqslant \dfrac{V(X)}{\delta^2}$

1. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une majoration de $P(|X-\mu| \geqslant 9)$ où X suit une loi binomiale de paramètres $n=50$ et $p=0{,}57$ et d'espérance μ.

2. Donner une minoration de $P(|X-\mu|<9)$.

3. On considère un échantillon de taille $m=8$ de variables aléatoires $X_1,\ldots,X_8$ suivant la même loi que X. Donner une

Niveau 1	**Niveau 2**
majoration de $P(\|M_8-\mu\| \geqslant 9)$	minoration de $P(\|M_8-\mu\|<4)$

4. On reprend le contexte de la question précédente. Quelle doit être la taille m de l'échantillon pour que

Niveau 1	**Niveau 2**
$P(\|M_m-\mu\| \geqslant 4)$ soit majorée par 0,1 ?	$P(\|M_m-\mu\|<9)$ soit minorée par 0,95 ?

D) Fonctions et équations différentielles

D.1 - Souvenirs de 1ère

1. Rappeler la méthode pour :

a. déterminer les variations d'une fonction.

b. étudier le signe d'une fonction de la forme $f : x \mapsto ax + b$.

c. étudier le signe d'une fonction de la forme $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$.

d. Rappeler la méthode pour étudier les postions relatives de deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

2. Rappeler la formule de l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse a d'une fonction f.

3. Rappeler les propriétés de la fonction exponentielle.

4. Mise en pratique 1 : étudier les variations sur $\mathbb{R}$ des fonctions $f : x \mapsto (3x - 2)e^x$ et $g : t \mapsto (x^2 - 4x + 1)^2 e^{3x+7}$.

5. Mise en pratique 2 : étudier les positions relatives de la courbe de $h : t \mapsto t^2 - 8t + 4$ et de sa tangente au point d'abscisse 0.

D.2 - Calculs de dérivées

1. Déterminer la dérivée des fonctions suivantes, où $f : x \mapsto e^{4x-5}$ et $g : x \mapsto (5x^2 - 2x + 5)^4$,

Niveau 1	Niveau 1	Niveau 2	Niveau 2	Niveau 2
$10f$	$f+g$	$h : x \mapsto xf(x)$	fg	$\dfrac{f}{g}$

2. Déterminer la dérivée des fonctions suivantes, où $f : t \mapsto \ln(4t+7)$ et $g : t \mapsto \sqrt{5t^2 - 2t + 5}$,

Niveau 1	Niveau 1	Niveau 2	Niveau 2	Niveau 2
$10f$	$f-g$	$h : t \mapsto tf(t)$	fg	$\dfrac{f}{g}$

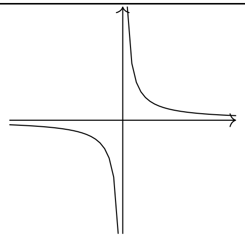
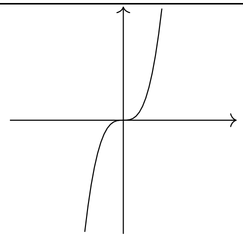
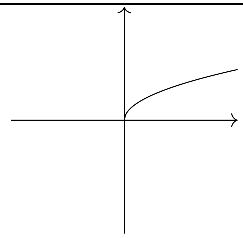
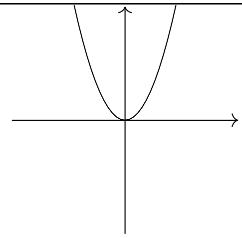
3. Étudier les variations sur I de :

Niveau 1	Niveau 1
$f : x \mapsto xe^{-8x+3}$ avec $I = \mathbb{R}$	$g : t \mapsto 13t\ln(2t)$ avec $I =]0\ ;\ +\infty[$

D.3 - Convexité

1. Rappeler la méthode permettant de déterminer la convexité d'une fonction. Comment en déduit-on les abscisses des points d'inflexion ?

2. Déterminer graphiquement la convexité des fonctions suivantes :

Courbe 1	**Courbe 2**	**Courbe 3**	**Courbe 4**
			

3. Étudier la convexité et les éventuels points d'inflexion des fonctions suivantes :

Niveau 1	**Niveau 1**	**Niveau 2**	**Niveau 2**
$x \mapsto e^{4x+7}$	$x \mapsto e^{-4x+8}$	$x \mapsto xe^{4x+9}$	$x \mapsto xe^{-4x-1}$

4. Après avoir étudié la convexité de f et l'équation réduite de sa tangente en 1, en déduire une inégalité. On suppose que

Niveau 1	**Niveau 2**
f est la fonction carré	f est la fonction racine carrée.

D.4 - Limites de fonctions

1. Dans quel cas parle-t-on d'asymptote verticale ? Horizontale ?

2. Déterminer la limite et les éventuelles asymptotes de $x \mapsto \dfrac{1}{x-79} - 9$ en :

Niveau 1	**Niveau 1**	**Niveau 2**
$+\infty$	$-\infty$	79

3. Déterminer la limite et les éventuelles asymptotes de $t \mapsto exp\left(\dfrac{1}{t-79} - 9\right)$:

Niveau 1	**Niveau 1**	**Niveau 2**
en $+\infty$	en $-\infty$	en 79

4. Donner un exemple de fonction admettant comme asymptote la droite d'équation

Niveau 2	**Niveau 2**
$y = -10$	$x = 11$

5. Déterminer les limites de

Niveau 1	**Niveau 1**	**Niveau 1**	**Niveau 1**
$x \mapsto \dfrac{e^x}{x^9}$ en $+\infty$	$x \mapsto e^x x^9$ en $-\infty$	$x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^9}$ en $+\infty$	$x \mapsto \ln(x) x^9$ en 0^+

$\boxed{\textit{Début corrigé (résultat exact)}}$

Par commodité, les différentes fonctions seront appelées f.

1. Asymptote verticale : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$; asymptote horizontale : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = a$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -9$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -9$; $\lim\limits_{x\to 79, x<79} f(x) = -\infty$ car $x - theProbaUnX < 0$; $\lim\limits_{x\to 79, x>79} f(x) = +\infty$ car $x - 58 > 0$

3. $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = e^{-9}$; $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = e^{-9}$; $\lim\limits_{t\to 79, t<79} f(t) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ car $x - theProbaUnX < 0$; $\lim\limits_{t\to 79, t>79} f(t) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x \infty$ car $x - 58 > 0$.

4. La fonction $x \mapsto -10 + \dfrac{1}{e^x}$ a pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = -10$ en $+\infty$.

La fonction $x \mapsto \ln(x - 11)$ a pour asymptote verticale la droite d'équation $x = 9$. Plus simple, $x \mapsto \dfrac{1}{x - 11}$ convient également.

5. D'après les théorèmes de croissantes comparées : $+\infty; 0; +\infty; 0$.

$\boxed{\textit{Fin corrigé}}$

D.5 - Théorème des valeurs intermédiaires

1. Déterminer le nombre de solutions à l'équation $g(t) = 42$:

t	$-\infty$		-10		9		$+\infty$
			79				$+\infty$
$g(t)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	-42				11		

2. Pour chacune des fonctions suivantes :

Niveau 0	**Niveau 1**	**Niveau 1**	
$f : x \mapsto 11 + \ln(x)$ sur $\mathbb{R}$	$f : x \mapsto -10x + e^x$ sur $]0;\ +\infty[$	$f : x \mapsto 11x + \ln(x)$ sur $\mathbb{R}$	sur $]0;\ +\infty[$

a. déterminer le nombre de solutions à $f(x) = 0$

b. déterminer le tableau de signes de f

c. déterminer un encadrement à 10^{-2} près de ces solutions

3. Soit $g : t \mapsto e^t + t^2 - 10$ définie sur $[0\ ;\ 2]$. On admet que $g(0) < 0 < g(2)$ et que g est strictement croissante sur $[0\ ;\ 2]$.

Compléter le programme ci-dessous afin qu'il puisse déterminer un encadrement à epsilon près, où epsilon est une valeur choisie par l'utilisateur, d'une solution de :

Niveau 2	**Niveau 3**
$g(t) = 0$	$g(t) = 1$

```
from maths import *
def g(t) :
    return ...

def dichotomie(epsilon) :
    a = ...
    b = 2
    while b − a > ... :
        m = (a+b)/2
        if g(a)*g(m) <= ... :
            b =
        ... :
            ...
        return ...
```

Début corrigé (méthode)

1. Il y a exactement une solution sur l'intervalle $[9\ ;\ +\infty[$. Sur $]-\infty\ ;\ 9[$, cela dépend de la valeur de $g(-10)$.

2. Pour celle de niveau 0, on peut directement résoudre exactement l'équation (une unique solution) (et donc en trouver une valeur approchée) et étudier le signe.

a. $\star$ Il faut dériver, étudier le signe de la dérivée, en déduire les variations de f sur l'ensemble de définition.

$\star$ Il faut également calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition (elles font appel aux théorèmes de croissances comparées).

Par exemple, si l'on veut calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} -10x+e^x$, on remarque que l'on a affaire à une forme indéterminée. Il faut alors factoriser par ce qui est le plus "fort" (ici l'exponentielle). Pour $x\neq 0$: $-10x+e^x = e^x\left(-10\dfrac{x}{e^x}+1\right)$.

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{e^x}{x}}$. D'après les théorèmes de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} -10\dfrac{x}{e^x}+1 = 1$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$, on en conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty} -10x+e^x = +\infty$.

$\star$ À l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, on peut alors déterminer le nombre de solutions à l'équation $f(x)=0$.

b. Pour déterminer le tableau de signes, on commence par placer la où les valeurs pour lesquelles $f(x)=0$. Puis on s'aide des variations pour trouver le signe.

c. On utilise la calculatrice (soit le tableau de valeurs, soit le graphique) pour déterminer un encadrement.

3. Niveau 2 (corrigé exact)

```
from maths import *
def g(t) :
    return [exp(t) + t*t - 10]
def dichotomie(epsilon) :
    a [= 0]
    b = 2
    while [b - a > epsilon] :
        m = (a+b)/2
        if g(a)*g(m) <= [0] :
            b = [m]
        [else] :
            a = [m]
    return [a, b]
```

Niveau 3 (corrigé exact)

```
from maths import *
def g(t) :
    return [exp(t) + t*t - 10 - 1]
def dichotomie(epsilon) :
    a [= 0]
    b = 2
    while [b - a > epsilon] :
        m = (a+b)/2
        if g(a)*g(m) <= [0] :
            b = [m]
        [else] :
            a = [m]
    return [a, b]
```

Fin corrigé

D.6 - Équations différentielles

1. (**Niveau 0**) Rappeler quelle fonction f vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$.

2. Déterminer une fonction f telle que :

Niveau 1	**Niveau 1**
$f' = f$ et $f(0) = 11$	$f' = 11e^x$ et $f(0) = 1$

3. Résoudre les équations différentielles suivantes :

Niveau 1	**Niveau 1**	**Niveau 2**	**Niveau 2**
$y' = -10y$	$y' + 13y = 0$	$y' = -4y$ et $y(0) = 2$	$y' = -8y$ et $y(0) = 3$

4. Résoudre les équations différentielles suivantes :

Niveau 2	**Niveau 2**	**Niveau 2**
$y' = -10y + 3$	$y' = -4y + 5$ et $y(0) = 2$	$y' - 8y = 42$ et $y(0) = 3$

Début corrigé (méthode)

1. La fonction exponentielle.

2.

Niveau 1	**Niveau 1**
$f : x \mapsto 11e^{x}$	$f' : x \mapsto e^{11x}$ et $f(0) = 1$

3. Rappelons que d'après les théorèmes du cours, l'ensemble des solutions des équations du type $y' = ay$ sont les fonctions $f : x \mapsto Ce^{ax}$, où C est un réel que l'on peut déterminer à partir des conditions initiales.

Niveau 1	**Niveau 1**	**Niveau 2**	**Niveau 2**
$f : x \mapsto Ce^{-10x}$	$f : x \mapsto Ce^{-13x}$	$f : x \mapsto 2e^{-4x}$	$f : x \mapsto 3e^{-8x}$

4. Rappelons que pour déterminer les solutions des équations de la forme $y' = ay + b$, on commencer par déterminer une solution constante, puis on résout $y' = ay$ (de solution $x \mapsto Ce^{ax}$ et on ajoute les deux fonctions obtenues. On chercher éventuellement à calculer la valeur de C si l'on connaît des conditions initiales.

Résolution par exemple de $(E) : y' = -4y + 5$ et $y(0) = 2$.

Soit $f : x \mapsto c$, où $c \in \mathbb{R}$, une solution particulière de (E).

Alors $f' = -4f + 5 \Leftrightarrow 0 = -4c + 5 \Leftrightarrow c = \dfrac{-5}{-4}$.

Donc : $f : x \mapsto \dfrac{-5}{-4}$ est une solution particulière de (E).

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $(H) : y' = -4y$ est $x \mapsto Ke^{-4x}$.

Les solutions de (E) sont donc de la forme $x \mapsto \dfrac{-5}{-4} + Ke^{-4x}$.

L'unique solution f de (E) vérifiant $f(0) = 2$ est telle que $2 = \dfrac{-5}{-4} + K \Leftrightarrow K = 2 + \dfrac{5}{-4}$.

Donc : $fx \mapsto \dfrac{-5}{-4} + \left(2 + \dfrac{-5}{-4}\right) e^{-4x}$.

De même, les solutions de $y' = -10y + 3$ sont de la forme $x \mapsto Ke^{-10x} - \dfrac{3}{-10}$ où K est un réel quelconque

et celles de $y' - 8y = 42$ sont de la forme $x \mapsto Ke^{-(-8)x} + \dfrac{42}{-8}$ où K est un réel à déterminer, sachant que $y(0) = 3$.

Fin corrigé

D.7 - Équations différentielles et primitives

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

Niveau 1	**Niveau 1**	**Niveau 1**	**Niveau 2**
$y' = -10x^5 + 11$	$y' = exp(11x - 10)$	$y' = \dfrac{1}{13t + 42}$	$y' = -4\dfrac{\ln(x)^{11}}{x}$

2. Résoudre les équations différentielles suivantes :

Niveau 1	**Niveau 1**	**Niveau 1**	**Niveau 2**
$y' = 11x^6 - 10$ avec $y(0) = 1$	$y' = exp(4x - 4)$ avec $y(0) = 2$	$y' = \dfrac{1}{9t + 4}$ avec $y(0) = 3$	$y' = -4\dfrac{\ln(x)^{50}}{x}$ avec $y(0) = 4$

3. Résoudre les équations différentielles suivantes. On pourra commencer par chercher une solution particulière affine :

Niveau 3	**Niveau 3**
$y' = y - 10x + 3$	$y' = -4y + 57x - 4$

Début corrigé (méthode)

1. Il s'agit ici de déterminer l'ensemble des primitives des fonctions associées au membre de droite. Dans les 4 cas, $C \in \mathbb{R}$.

Niveau 1	**Niveau 1**	**Niveau 1**	**Niveau 2**
$F : x \mapsto \frac{-10}{6}x^6 + 11x + C$	$F : x \mapsto \frac{1}{11}exp(11x - 10) + C$	$F : t \mapsto \frac{1}{13}\ln(13t + 42) + C$	$F : x \mapsto \frac{-4}{12}\ln(x)^{12} + C$

On peut réécrire la dernière équation comme $y' = -4\frac{1}{x}\ln(x)^{11}$, soit encore $y' = -4 \times u' \times u^{11}$. D'où le résultat.

2. Exactement le même type que précédemment. Dans le même ordre en plus. Il reste juste à déterminer la valeur de C en résolvant l'équation $F(0) = \dots$.

3. Pour les résoudre, il faut d'abord déterminer une solution particulière affine, donc une solution de la forme $f : x \mapsto ax + b$, où a et b sont de réels à déterminer.

Il faut ensuite résoudre l'équation homogène associé (H).

$\star$ Pour la première équation, on trouve $f : x \mapsto 10x - 13$.

L'équation homogène associée est $y' = y$, dont les solutions sont de la forme $x \mapsto Ce^x$, où $C \in \mathbb{R}$.

Les solutions de $y' = y - 10x + 3$ sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto 10x - 13 + Ce^x$, où $C \in \mathbb{R}$.

$\star$ Pour la deuxième, on trouve que les fonctions solution sont de la forme $x \mapsto \frac{-57}{-4}x + \frac{61}{-4} + Ce^{-4x}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Fin corrigé

D.8 - Intégration

1. Soit $I = \int_{-4}^{0} e^x + 4 \, \mathrm{d}x$. Interpréter géométriquement I.

2. Calculer les valeurs exactes intégrales suivantes :

Niveau 1	**Niveau 1**	**Niveau 1**	**Niveau 2**
$\int_0^4 -10x^5 + 11 \, \mathrm{d}x$	$\int_{-1}^{9} e^{11x-10} \, \mathrm{d}x$	$\int_0^{11} \frac{1}{13t+42} \, \mathrm{d}t$	$\int_{-50}^{57} -4\frac{\ln(x)^{11}}{x} \, \mathrm{d}x$

3. À l'aide d'une intégration par partie, calculer :

Niveau 1	**Niveau 2**	**Niveau 3**	**Niveau 4**
$\int_0^4 -10xe^{11x+1} \, \mathrm{d}x$	$\int_{-1}^{9} x(11x-10)^{42} \, \mathrm{d}x$	$\int_1^{11} 2\ln(t) \, \mathrm{d}t$	$\int_1^{50} -4\sqrt{x} \, \mathrm{d}x$

Début corrigé (méthode)

1. Comme $f : x \mapsto e^x + 4$ est positive sur l'intervalle $[-4\ ;\ 0]$, I est l'aire du domaine situé :

- sous la courbe de f ;
- au-dessus de l'axe des abscisses ;
- entre les droites d'équation $x = -4$ et $x = 0$.

2. Rappelons simplement que $\displaystyle\int_a^b f(z)\ \mathrm{d}z = F(b) - F(a)$, où a est une primitive de f.

Pour chacune des intégrales, on peut prendre comme primitives celles de la question 1 du point "Équations différentielles et primitives" avec $C = 0$ (oui, ce sont les mêmes fonctions).

3. Pour les deux premières, on doit poser (à un coefficient près éventuellement) $v : x \mapsto x$ et pour les deux dernières, $u' : x \mapsto 1$. Essayez de nouveau par vous-même à partir de là !

Voici ci-après sinon pour le début des calculs.

- Avec $v : x \mapsto -10x$ et $u' : x \mapsto e^{11x+1}$, on obtient, en appliquant une intégration par parties (IPP) :
$\displaystyle\int_0^4 -10xe^{11x+1}\ \mathrm{d}x = \left[-10x\frac{e^{11x+1}}{11}\right]_0^4 - \int_0^4 -10\frac{e^{11x+1}}{11}\ \mathrm{d}x.$
L'intégrale de fin se calcule sans difficulté (il faut trouver une primitive de e^u).
- Avec $v : x \mapsto x$ et $u' : x \mapsto (11x-10)^{42}$, on obtient, en appliquant une intégration par parties (IPP) :
$\displaystyle\int_{-1}^9 x(11x-10)^{42}\ \mathrm{d}x = \left[x \times \frac{1}{43 \times 11}(11x-10)^{43}\right]_{-1}^9 - \int_{-1}^9 \frac{1}{43 \times 11}(11x-10)^{43}\ \mathrm{d}x.$
L'intégrale de fin se calcule sans difficulté (une primitive de la fonction dans l'intégrale est $x \mapsto \dfrac{1}{44 \times 11 \times 43 \times 11}(11x-10)^{44}$).
- $\displaystyle\int_1^{11} 2\ln(t)\ \mathrm{d}t = 2\int_1^{11} \ln(t)\ \mathrm{d}t = 2\left(\int_1^{11} 1 \times \ln(t)\ \mathrm{d}t\right)$. Voir le cours pour la suite du calcul (rappel : on pose $u' : t \mapsto 1$.
- $\displaystyle\int_1^{50} -4\sqrt{x}\ \mathrm{d}x = \int_1^{50} -4 \times \sqrt{x}\ \mathrm{d}x.$
Posons $v : x \mapsto \sqrt{x}$ et $u' : x \mapsto -4$.
Alors, en réalisant une IPP :
$\displaystyle\int_1^{50} -4\sqrt{x}\ \mathrm{d}x = \left[-4x \times \sqrt{x}\right]_1^{50} - \int_1^{50} -4x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = \left[-4x\sqrt{x}\right]_1^{50} - \int_1^{50} \frac{-4}{2}\sqrt{x}\ \mathrm{d}x \Leftrightarrow \left[-4x\sqrt{x}\right]_1^{50} = \int_1^{50} -4\sqrt{x} + \int_1^{50} \frac{-4}{2}\sqrt{x}\ \mathrm{d}x = \int_1^{50} \frac{3 \times -4}{2}\sqrt{x}\ \mathrm{d}x = \frac{3 \times -4}{2}\int_1^{50} \sqrt{x}\ \mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_1^{50} \sqrt{x}\ \mathrm{d}x = \frac{2}{3 \times -4}\left[-4x\sqrt{x}\right]_1^{50} \Leftrightarrow \int_1^{50} -4\sqrt{x}\ \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\left[-4x\sqrt{x}\right]_1^{50}$

$\boxed{\textit{Fin corrigé}}$

D.9 - Fonctions trigonométriques

1. Dériver (rappel : tan=sin/cos).

Niveau 1	**Niveau 1**	**Niveau 2**	**Niveau 2**	**Niveau 3**
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto x\sin(x)$	$x \mapsto \cos(4x-1)$	$t \mapsto t\sin(-9t+7)$	$x \mapsto \tan(x)$

2. Résoudre sur $[-\pi\ ;\ \pi]$:

Niveau 1	**Niveau 1**	**Niveau 1**	**Niveau 1**	**Niveau 2**
$\cos(x) = \dfrac{1}{2}$	$\sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos(x) = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$	$\sin(t) = 0$	$\tan(x) = 1$

3. Résoudre sur $[-\pi\ ;\ \pi]$:

Niveau 2	**Niveau 2**	**Niveau 2**	**Niveau 2**	**Niveau 3**
$\sin(x) > \dfrac{1}{2}$	$\cos(x) - \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 0$	$\sin(x) + \dfrac{\sqrt{2}}{2} > 0$	$\cos(t) > 0$	$\tan(x) \geqslant 0$

4. Dresser le tableau de variations sur $[-\pi\ ;\ \pi]$ de $a \mapsto \cos(a) + \dfrac{1}{2}a$.

E) Géométrie dans l'espace

E.1 - Coordonnées de point et conséquences

Dans le cube $ABCDEFGH$, déterminer les coordonnées

1. Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$

2. Dans le repère $(B; \overrightarrow{BA}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{BE})$

de :

Niveau 1	**Niveau 1**	**Niveau 1**	**Niveau 1**
A	B	G	F

3. En déduire les coordonnées de I, milieu de $[GF]$

4. Déduire également les coordonnées de $\overrightarrow{GF}$ et la longueur du segment $[GF]$.

$\boxed{\textit{Début corrigé (résultat exact)}}$

1. $A(0\ ;\ 0\ ;\ 0\ )$, $B(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $G(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$, $F(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$.

2. $A(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $G(\ -1;\ 1\ ;\ 1)$, $F(-1\ ;\ 0\ ;\ 1)$

car, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AD}$

et $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{BA} + 0 \times \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE}$.

3. Le calcul dans chaque repère est $I\left(\dfrac{x_G + x_F}{2}\ ;\ \dfrac{y_G + y_F}{2}\ ;\ \dfrac{z_G + z_F}{2}\right)$.

4. Le calcul dans chaque repère est $\overrightarrow{GF}\begin{pmatrix} x_F - x_G \\ y_F - y_G \\ z_F - z_G \end{pmatrix}$.

On ne peut appliquer la formule de la distance que dans un repère orthonormé, donc que dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

Ici $GF = ||\overrightarrow{GF}|| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$.

$\boxed{\textit{Fin corrigé}}$

E.2 - Vecteurs de l'espace

On considère les trois vecteurs de l'espace $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\-4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}3\\7\\6\end{pmatrix}$.

1. Déterminer si :

Niveau 1	**Niveau 2**	**Niveau 1**	**Niveau 2**
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires	$(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w})$ définit une base du plan	$\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont orthogonaux	$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.

2. Déterminer l'angle :

Niveau 2	**Niveau 3**
$(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$	$(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w})$

3. Dans le cube $ABCDEFGH$, exprimer le vecteur $\overrightarrow{DF}$ en fonction des vecteurs de la base :

Niveau 1	**Niveau 2**
$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$	$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AG})$

Début corrigé (résultat exact)

1. $\star$ Comme $\dfrac{0}{1} \neq \dfrac{1}{-4}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.

Même principe pour montrer que $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w})$ définit une base du plan (c'est le cas si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$) sont non colinéaires).

$\star$ $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w} = 0 \times 3 + -4 \times 7 + 1 \times 6 = -22 \neq 0$.

Donc $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas orthogonaux.

$\star$ Il faut résoudre l'équation vectorielle $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{w} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 1 & = & \alpha \times 0 + \beta 3 \\ 1 & = & \alpha - 4 + \beta 7 \\ 2 & = & \alpha \times 1 + \beta 6 \end{array}\right.$

La première ligne nous donne $\beta = \dfrac{1}{3}$. En remplaçant β dans les deux autres lignes et en isolant à chaque fois α, on trouve des valeurs différentes pour α : le système est donc impossible.

Les trois vecteurs ne sont donc pas coplanaires et définissent ainsi une base du plan.

Fin corrigé

Début corrigé (méthode)

2. Pour ce genre de questions, on calcule le produit scalaire avec les deux formules $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$ et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

On en déduit que $xx' + yy' + zz' = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \dfrac{xx' + yy' + zz}{\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|}$.

Dès lors, l'angle $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \cos^{-1}\left(\dfrac{xx' + yy' + zz}{\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|}\right) = \text{arccos}\left(\dfrac{xx' + yy' + zz}{\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|}\right)$.

Attention à veiller que la calculatrice soit réglée en degrés et non en radians.

3. Même principe que dans $E.1$: on utilise la relation de Chasles pour décomposer $\overrightarrow{DF}$ en fonction des trois vecteurs de la base.

Ainsi, $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = 1 \times \overrightarrow{AB} - 1 \times \overrightarrow{AD} + 1 \times \overrightarrow{AE}$ donc $\overrightarrow{DF}(1\ ;\ -1\ ;\ 1)$.

Dans l'autre base, on trouve $\overrightarrow{DF}(2\ ;\ -2\ ;\ 1)$.

Fin corrigé

E.3 - Droites de l'espace

Soit $A(4\ ;\ -2\ ;\ 2)$, $B(-2\ ;\ -4\ ;\ 13)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-4/7\\-1\\-2\end{pmatrix}$

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite

Niveau 0	**Niveau 1**	**Niveau 1**
(Δ) passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$	(D) passant par B de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$	(AB)

2. (**Niveau 1**) Soit $C(1\ ;\ 7\ ;\ 3)$. Déterminer si C appartient à Δ ; (D) ; (AB).

3. Déterminer si (Δ) et (D) sont

Niveau 1	**Niveau 1**	**Niveau 2**	**Niveau 2**
parallèles	orthogonales	sécantes	coplanaires

4. Déterminer si la droite (AB) est perpendiculaire à

Niveau 1	**Niveau 1**
(Δ)	(D)

On rappelle que $A(4\ ;\ -2\ ;\ 2)$, $B(-2\ ;\ -4\ ;\ 13)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-4/7\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

On note (Δ) la droite passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et (D) passant par B de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$.

5. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de :

Niveau 1	**Niveau 2**	**Niveau 2**
A sur (AB)	A sur (D)	B sur (Δ).

6. Déterminer la distance du point

Niveau 1	**Niveau 2**	**Niveau 2**
A à la droite (AB)	A à la droite (D)	B à la droite (Δ).

Début corrigé (résultat exact)

1. Faisons directement la droite (AB). Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB}$, dont les coordonnées sont $\begin{pmatrix}-6\\-2\\11\end{pmatrix}$. Comme $A(4\ ;\ -2\ ;\ 2)$, une représentation paramétrique de (AB) est $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 4+(-6)t \\ y & = & -2+(-2)t \\ z & = & 2+(11)t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$

Note : on aurait pu choisir le point B, le vecteur $\overrightarrow{BA}$...

2. $C(1\ ;\ 7\ ;\ 3) \in (AB) \Leftrightarrow$ il existe $t \in \mathbb{R} \left\{\begin{array}{lcl} 1 & = & 4+(-6)t \\ 7 & = & -2+(-2)t \\ 3 & = & 2+(11)t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} t & = & \dfrac{1-4}{-6} = \dfrac{-3}{-6} \\ t & = & \dfrac{7--2}{-2} = \dfrac{9}{-6} \\ t & = & \dfrac{3-2}{11} = \dfrac{1}{-6} \end{array}\right.$ ce qui est impossible. Donc $C \notin (AB)$.

Fin corrigé

Début corrigé (méthode)

3. ⋆ Pour le parallélisme, on teste la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

⋆ Pour l'orthogonalité, on teste si le produit scalaire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ vaut 0.

⋆ Pour déterminer si elles sont sécantes, on raisonne ainsi : $M(x;y;z) \in (\Delta)\cap(D) \Leftrightarrow$ il existe $t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}$ tel que $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 4+(7)t \\ y & = & -2+(-4)t \\ z & = & 2+(1)t \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2+(-4/6)k \\ y & = & 4-(1)k \\ z & = & 13-(2)k \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{rcl} 4+(7)t & = & -2+(-4/6)k \\ -2+(-4)t & = & 4-(1)k \\ 2+(1)t & = & 13-(2)k \end{array}\right.$ On résout ce système de trois équations à deux inconnues. Si l'on trouve une contradiction, les droites ne sont pas sécantes. Sinon, elles le sont. Pour trouver les coordonnées de M, il suffit alors de remplacer t ou k par la valeur trouvée.

⋆ Démontrer qu'elles sont coplanaires revient à démontrer qu'elles sont soient parallèles, soient sécantes.

On commence toujours par étudier le parallélisme (ce qui est plutôt facile). Si les droites ne sont pas parallèles, on regarde si elles sont sécantes. Si elles ne sont ni parallèles ni sécantes, alors elles sont non coplanaires.

4. Comme $A \in (AB) \cap \Delta$, on sait déjà que les deux droites sont sécantes. Pour démontrer qu'elles sont ou non perpendiculaires, il reste à vérifier si elles sont orthogonales (à l'aide du produit scalaire de leurs vecteurs directeurs respectifs).

Fin corrigé

Début corrigé (méthode)

5. $\star$ Remarquons tout de suite que le projeté orthogonal de A sur (AB) est lui-même. La distance du point A à (AB) vaut donc 0.

$\star$ Intéressons-nous au projeté $H(x_H\ ;\ y_H\ ;\ z_H)$. de B sur (Δ). Comme $H \in (\Delta)$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x_H &= 4+(7)t \\ y_H &= -2+(-4)t \\ z_H &= 2+(1)t \end{cases}$

De plus, $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} x_H - x_B \\ y_H - y_B \\ z_H - z_B \end{pmatrix}$, i.e. $\begin{pmatrix} (7)t+(6) \\ (-4)t+(2) \\ (-4)t+(-11) \end{pmatrix}$, et $\vec{u}\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{u} = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow t = \ldots.$

On remplace alors t par la valeur trouvée afin de déterminer les valeurs numériques des coordonnées de H.

6. Pour déterminer la distance de B à la droite (Δ), il ne reste plus qu'à calculer $BH = \|\overrightarrow{BH}\|$.

Fin corrigé

E.4 - Plans de l'espace

On considère les trois vecteurs de l'espace $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\-4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}3\\7\\6\end{pmatrix}$.

1. Déterminer si les points définissent un plan :

Niveau 1	**Niveau 1**
$A(4\ ;\ -2\ ;\ 2)$, $B(-2\ ;\ -4\ ;\ 13)$, $C(-2\ ;\ 42\ ;\ 1)$.	$E(4\ ;\ 2\ ;\ -2)$, $F(-2\ ;\ 4\ ;\ 4)$, $G(-2\ ;\ 1\ ;\ 42)$.

2. Déterminer une représentation paramétrique du plan :

Niveau 1	**Niveau 1**
passant par A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$	(ABC)

3. Déterminer une équation cartésienne du plan

Niveau 1	**Niveau 1**
passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{u}$	passant par B et de vecteur normal $\overrightarrow{w}$

4. Rappeler qu'elles sont les positions relatives possibles de plans.

5. Soit P,Q,R trois plans d'équations respectives $P : x - 4y + (-2z) + 2 = 0$, $Q : 2x - y + 1z + 7 = 0$ et $R : -4x - 7y + z = 0$.

Déterminer les positions relatives de :

Niveau 2	**Niveau 2**
P et Q	Q et R

6. Déterminer si les plans sont orthogonaux pour :

Niveau 2	**Niveau 2**
P et R	Q et R

7. Soit $A(4, -2,2)$. Déterminer les coordonnées de son projeté orthogonal sur :

Niveau 2	**Niveau 2**
P	Q

8. Soit $B(-2, -2,13)$. Déterminer la distance de B au plan :

Niveau 2	**Niveau 2**
Q	R

$\boxed{\textit{Début corrigé (méthode)}}$

1. (ABC) est un plan si et seulement $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Il suffit donc de tester la colinéarité de ces vecteurs (ce qui se fait, rappelons, en vérifiant si leurs coordonnées sont proportionnelles ou non).

Même principe pour les points E, F et G.

2. *(corrigé exact pour l'un des deux).* Rappelons que le plan (ABC) passe par exemple par A et a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ par exemple. Une fois que l'on a ces informations, il s'agit de la même technique que pour le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 4+t \\ y & = & -2+1t-4s, \qquad t\in\mathbb{R}, s\in\mathbb{R} \\ z & = & 2+2t+s \end{array}\right.$$

3. *(corrigé exact pour l'un des deux).* Même principe pour les deux questions. Pour le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{u}$:

il existe $d\in\mathbb{R}$ tel qu'une équation cartésienne de ce plan soit $x+1y+2z+d=0$.

Or : A est dans ce plan donc $4+1\times(-2)+2\times 2+d=0$.

On en déduit $d=-6$.

Une équation cartésienne du plan est donc $4+1\times(-2)+2\times 2-6=0$.

4. Sécants (et l'intersection est alors une droite) ou parallèles (éventuellement confondus).

5. Il s'agit là encore de la même méthode pour les deux questions.

Soit P,Q,R trois plans d'équations respectives $P : x-4y-(-2)z+2=0$, $Q : 2x-y+1z+7=0$ et $R : -4x-7y+z=0$.

Soit $\overrightarrow{p}\begin{pmatrix}1\\-4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{q}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ des vecteurs normaux respectifs aux plans P et Q.

Alors P et Q sont parallèles (ou confondus) si et seulement $\overrightarrow{p}$ et $\overrightarrow{q}$ sont colinéaires.

6. Il s'agit là encore de la même méthode pour les deux questions. Il suffit de tester si les vecteurs normaux sont orthogonaux (à l'aide du produit scalaire $xx'+yy'+zz'$, qui vaut 0 si et seulement les vecteurs sont orthogonaux).

7. Il s'agit là encore de la même méthode pour les deux questions. Soit H le projeté orthogonal sur le plan P. Alors $\overrightarrow{AH}$ est colinéaire à $\overrightarrow{p}$. On en déduit qu'il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AH}=k\overrightarrow{p}$ soit $\left\{\begin{array}{rcl} x-4 & = & k \\ y-(-2) & = & -4k \\ z-2 & = & -2k \end{array}\right.$ soit encore $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & k+4 \\ y & = & -4k-(-2) \\ z & = & -2k+2 \end{array}\right.$

De plus, $H\in P$ donc $x-4y-(-2)z+2=0$.

On en déduit que $k+4-4(-4k-(-2))-(-2)(-2k+2)+2=0$.

On résout cette équation et on trouve alors la valeur de k. En remplaçant dans le système précédent, on en déduit les coordonnées de H.

8. Il s'agit là encore de la même méthode pour les deux questions. Il suffit de déterminer le projeté orthogonal H de B sur un plan puis de calculer la distance BH.

Fin corrigé

E.5 - Droites et plans de l'espace

1. Rappeler les positions relatives possibles de plans et droites.

2. Déterminer les positions relatives des droites et plans suivants. On déterminera les coordonnées des éventuels points d'intersection.

Niveau 1	**Niveau 2**
$P : -2x + 2y + 4z + 1 = 0$	$Q : -2x + 4y + z + 2 = 0$
et $\Delta \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 2 + 4t \\ y & = & -2 \\ z & = & 2t \end{array} \right. , t \in \mathbb{R}$	et $(D) \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 4 + k \\ y & = & -2 + 3k \\ z & = & 2 + k \end{array} \right. , k \in \mathbb{R}$

Début corrigé (méthode)

1. Parallèles (donc soit strictement parallèles avec 0 point d'intersection, soit confondus avec la droite comme intersection) ou sécants (l'intersection est alors un point).

2. On regarde si un vecteur normal du plan est orthogonal à un vecteur directeur de la droite. Si c'est le cas, le plan et la droite sont parallèles. Sinon, ils sont sécants en un point.

   - **Pour celui de niveau 1** : un vecteur normal de (P) est $\overrightarrow{p}\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de Δ est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

     D'où $\overrightarrow{p}.\overrightarrow{u} = -2\times 4 + 2\times 0 + 4\times 2 = 0$.

     Donc : $\overrightarrow{p}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux.

     Donc : (P) et Δ sont parallèles.

     Remarque : pour savoir si la droite est incluse dans le plan, il suffit de voir si les coordonnées de $A(2\ ;\ -2\ ;\ 0)$ vérifient l'équation de (P).

   - Même principe, avec $\overrightarrow{q}\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$

     Donc : $\overrightarrow{q}.\overrightarrow{v} = \ldots = 11 \neq 0$

     Les vecteurs ne sont donc pas orthogonaux.

     Donc Q et (D) sont sécants en un point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$.

     Comme $M \in (D)$, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 4+k \\ y & = & -2+3k \\ z & = & 2+k \end{array}\right.\quad , k\in\mathbb{R}$.

     De plus, comme $M \in Q$, $-2x+4y+z+2=0$.

     Donc : $-2(4+k)+4(-2+3k)+(2+k)+2=0$

     On en déduit que $11k+(-12)=0 \Leftrightarrow k = -\dfrac{-12}{11}$.

     En remplaçant k dans le système $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 4+k \\ y & = & -2+3k \\ z & = & 2+k \end{array}\right.\quad , k\in\mathbb{R}$, on trouve alors les coordonnées de M.

Fin corrigé

F) Crédits

- Document réalisé par Olivier Vanwalleghem, enseignant de mathématiques au lycée générale et technologique Catherine et Raymond Janot de Sens.
- Les questions sont relatives au programme de Terminales Générales, spécialité mathématiques de la rentrée 2020.
- Pour toute remarque, critique, question ou autre, merci de me contacter à l'adresse courriel suivante :

olivier.vanwalleghem@ac-dijon.fr

- Date de dernière mise à jour : 24 mai 2021.
- Document réalisé dans le langage LaTeX, à l'aide notamment des logiciels texmaker et miktex. Le document "LatexPourProfMaths" d'Arnaud Gazagnes (version du 1er novembre 2014), très bien écrit et très accessible, m'a été d'un grand secours pour découvrir les merveilles que recèlent LaTeX !
- Les valeurs numériques étant générées aléatoirement par LaTeX, les fichiers sont tous différents les uns des autres. Ce qui explique les corrigés expliquant la méthode et ne donnant pas toujours la valeur numérique exacte.